Beiträge zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit 4 und 5 singulären Stellen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

K. B. Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen

vorgelegt von

Conrad Gerstenmeier

aus Nürnberg.

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Januar 1910.

Erlangen.

K. B. Hof- u. Univ.-Buchdruckerei von Junge & Sohn.

1910.

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Universität Erlangen.

Referent: Herr Professor Dr. Noether.
Dekan: Herr Professor Dr. Luchs.

Inhaltsverzeichnis.



Einleitung.

Im Mittelpunkt der klassischen Theorie der automorphen Funktionen steht das Problem, die sogenannten akzessorischen Parameter der dazu gehörigen linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung derart zu bestimmen, daß die unabhängige Veränderliche x eine eindeutige Funktion des Quotienten η zweier Partikularlösungen derselben wird. Die Differentialgleichung, die wir den nachfolgenden Betrachtungen zu Grunde legen wollen, lautet in ihrer allgemeinsten Form:

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1-\alpha}{x-a}+\frac{1-\beta}{x-b}+\ldots\ldots+\frac{1-\mu}{x-m}\right)\frac{dy}{dx}+$$

$$+\frac{y}{(x-a)(x-b)\ldots(x-m)}\left(Ax^{N-3}+B_{N-4}x^{N-4}+\ldots+B_0\right)=0$$

wobei N die Anzahl der singulären Stellen bedeutet. Diese singulären Stellen von a, b, . . . bis $n=\infty$, sowie alle auftretenden Exponentendifferenzen und Parameter sind vorgegebene reelle Größen. Ferner sollen alle n singulären Punkte reguläres Verhalten zeigen, d. h. in jedem der n Punkte gibt es zwei Fundamentallösungen, die sich in erster Annäherung wie Potenzreihen verhalten.

Bekanntlich bildet dann der Quotient η zweier Partikularlösungen der Differentialgleichung (1) die

von der Achse des Reellen begrenzte Halbebene der x auf ein Kreisbogenpolygon in der komplexen η-Ebene ab. Zweckmäßiger ist es jedoch, das so entstehende Kreisbogenpolygon auf der η-Kugel zu betrachten, deren Punkte denen der η-Ebene durch stereographische Projektion zugeordnet sind. Wir gehen nun darauf hinaus, die in der Differentialgleichung noch willkürlichen Parameter dadurch festzulegen, daß wir den einzelnen Polygonen der η-Kugel bestimmte Eigenschaften vorschreiben, etwa derart, daß die Ecken des Kreisbogenpolygons auf einen Orthogonalkreis liegen.

Die Theorie der automorphen Funktionen beschränkt sich dabei auf den Fall, daß alle Winkel, i. e. Exponentendifferenzen, des Kreisbogenpolygons von der Form $\frac{\pi}{n}$ sind, wo n irgend eine ganze Zahl oder auch unendlich sein kann. Im letzteren Falle treten Nullwinkel auf.

Herr Klein hat nun in seinen Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen im S.-S. 1894[1]) das Problem angeregt, die allgemeinen Maßzahlen des Kreisbogenpolygons mit den akzessorischen Parametern unserer Differentialgleichung in Verbindung zu bringen. Er versuchte dieses Problem mit den von ihm sogenannten Oszillationstheoremen zu verknüpfen, was ihm jedoch zunächst nur in einigen Spezialfällen gelang. In seiner Festschrift[2]) anläßlich des 70 jährigen Geburtstages von Herrn Geheimrat Gordan hat Herr Klein — zunächst wenigstens für das Viereck — Sätze aufgestellt derart, daß man bei vorgegebenen sin-

---

1) Autographierte Vorlesungshefte, ausgearbeitet von E. Ritter. 1906 bei B. G. Teubner erschienen.

2) Mathematische Annalen, Bd. 64 (1907).

gulären Stellen und Exponentendifferenzen den akzessorischen Parameter auf unendlich viele Weisen — Grundtheorem und Obertheoreme — so bestimmen kann, daß das Viereck einen Orthogonalkreis besitzt. Der Fall, daß die Seiten unseres Vierecks den Orthogonalkreis nicht schneiden, entspricht dem klassischen Fundamentaltheorem.

Herr Hilb hat nun in seiner Annalenarbeit 1908[1]) ebenfalls nur für das Viereck die von Herrn Klein aufgestellten Sätze wirklich bewiesen und für diesen Spezialfall alle einschlägigen Fragen erledigt. Jedoch hat er dabei die wesentliche Voraussetzung gemacht, daß alle Winkel des Polygons zwischen 0 und 1 liegen, wobei die Grenzen selbst ausgeschlossen sein sollen.

In einem Kolleg über „ausgewählte Kapitel der Theorie der linearen Differentialgleichungen" im S.-S. 1908 trug nun Herr Hilb über diese neuen Untersuchungen vor und deutete in allgemeinsten Umrissen die weitere Ausdehnung der Theorie auf höhere Fälle an. Im Anschluß daran forderte er mich auf, für den Fall des Auftretens von Nullwinkeln beim Viereck und allgemein für den Fall einer Differentialgleichung mit fünf singulären Punkten eine volle Diskussion der herrschenden Verhältnisse zu geben. Dieses will ich im folgenden durchführen.

Bemerken möchte ich noch, daß ich mich im Anschluß an die Annalenarbeit von Herrn Hilb stets an den Fall halte, daß die Parameter reell sind. Denn würde man auch komplexe Parameter zulassen, so

---

1) Mathematische Annalen, Bd. 66 (1908).

würde sich nach neueren Untersuchungen[1]) an jedes unserer Obertheoreme eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit neuer Obertheoreme knüpfen.

§ 1.

Definitionen und Festlegung der Bezeichnungen.

Wir gehen bei unseren folgenden Untersuchungen von der Differentialgleichung (1) aus, die die fünf singulären Punkte a, b, c, d und $e = \infty$ besitzt. Zu diesen singulären Stellen gehören die Exponentenpaare, $\alpha, 0$; $\beta, 0$; $\gamma, 0$, $\delta, 0$; und $\varepsilon', \varepsilon''$; ferner seien: a, b, c, d, α, β, γ, δ, ε reelle Größen, die den Ungleichungen:

$$(2) \quad \begin{gathered} a > b > c > d;\ 0 \leqq \alpha < 1;\ 0 \leqq \beta < 1;\ 0 \leqq \gamma < 1; \\ 0 \leqq \delta < 1 \text{ und } 0 \leqq \varepsilon < 1 \end{gathered}$$

unterworfen sind.

Nach den allgemein gültigen Regeln der Theorie der linearen Differentialgleichungen bestehen dann noch folgende Relationen:

$$(3) \quad \begin{gathered} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon' + \varepsilon'' = 3 \\ \varepsilon' \cdot \varepsilon'' = A \text{ und } \varepsilon' - \varepsilon'' = \varepsilon. \end{gathered}$$

Die Ausschließung der Fälle, bei welchen die Exponentendifferenzen $\geqq 1$ sind, geschieht lediglich deshalb, weil dabei die meisten Eindeutigkeitstheoreme verloren gehen.

Die beiden zu einem singulären Punkte, z. B. zu b, gehörigen Fundamentallösungen seien:

$$\overset{b}{Y}_{\beta}(x) = (x-b)^{\beta}\, \mathfrak{P}_1(x-b) \text{ und } \overset{b}{Y}_{0}(x) = \mathfrak{P}_2(x-b);$$

1) Vergl. E. Hilb, Neue Entwicklungen über lineare Differentialgleichungen. Göttinger Nachrichten: Math.-phys. Klasse 1909 und die eben erschienene zweite Mitteilung in den mathematischen Annalen, Bd. 68, pag. 69.

die bei diesen Lösungen noch zur Verfügung stehenden konstanten Faktoren denken wir uns so gewählt, daß nachfolgende Bedingungsgleichungen erfüllt sind:

$$\text{(4)} \quad \overset{b}{Y}_{\beta}(b) = 0; \; \overset{b}{Y}_{o}(b) = 1; \; \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}\overset{b}{Y}_{\beta}(x)\right)_{x=b+\varepsilon} = +1$$

$$\text{und} \quad \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d}{dt}\overset{b}{Y}_{\beta}(x)\right)_{x=b-\varepsilon} = -1,$$

wobei t durch Formel (9) des nächsten Paragraphen definiert wird.

Die Normierung der Fundamentallösungen der Punkte a und c wollen wir so treffen, daß sie sich in der Form darstellen lassen:

$$\text{(5)} \quad \begin{aligned} \overset{a}{Y}_{\alpha}(x) &= \overset{b}{Y}_{\beta}(x) - l_1 \overset{b}{Y}_{o}(x) \\ \overset{a}{Y}_{o}(x) &= \overset{b}{Y}_{\beta}(x) - l_2 \overset{b}{Y}_{o}(x) \\ \overset{c}{Y}_{\gamma}(x) &= \overset{b}{Y}_{\beta}(x) - \nu_1 \overset{b}{Y}_{o}(x) \\ \overset{c}{Y}_{o}(x) &= \overset{b}{Y}_{\beta}(x) - \nu_2 \overset{b}{Y}_{o}(x) \end{aligned} \quad \text{und}$$

Dabei sind l_1 und l_2 reelle Größen, ν_1 und ν_2 komplexe Ausdrücke von der Form $\nu_1 = n_1 e^{\beta\pi i}$ und $\nu_2 = n_2 e^{\beta\pi i}$, wobei $\beta\pi$ der Winkel des Kreisbogenpolygons an der Ecke b' ist und n_1 und n_2 reelle Größen bedeuten.

Ganz analog lassen sich die Fundamentallösungen der Punkte d und b durch diejenigen des Punktes c ausdrücken.

Der Quotient η zweier Partikularlösungen bildet dann die von der Achse des Reellen begrenzte Halbebene auf ein auf der η-Kugel gelegenes Kreisbogenfünfeck

a' b' c' d' e' ab, das wir näher betrachten wollen. Die fünf Ebenen, die die Seiten unseres Kreisbogenfünfeckes auf der Kugel ausschneiden, treffen sich aufeinanderfolgend in fünf Raumgeraden, den „Achsen des Kerns". Diese letzteren werden die Kugel in den Punkten a", b", c", d", e" das zweitemal schneiden.

Setzen wir $\eta = \frac{Y^b_\beta}{Y^b_0}$, so nimmt dieser Quotient in den Punkten a' a", b', b", c', c" entsprechend die Werte an: l_1, l_2, 0, ∞, ν_1, ν_2. Legen wir nun die projektive Maßbestimmung zu Grunde, deren Fundamentalfläche die η-Kugel ist, dann bekommt man für den von den Geraden a' a" und b' b" eingeschlossenen Winkel φ, der Seite b' a', den Ausdruck[1]:

$$(6) \qquad \cos\varphi = \frac{l_1 + l_2}{l_2 - l_1} \text{ oder: } \sin\varphi = \frac{2\sqrt{-l_1 l_2}}{l_1 - l_2};$$

ferner erhält man für die Kantenlänge auf b' b" d. h. für die Länge der Strecke, welche von den Schnittpunkten der Achsen a' a" und c' c" mit b' b" begrenzt wird, den Ausdruck[2]:

$$(7) \qquad K = C \cdot \lg \frac{l_1 l_2}{n_1 n_2},$$

wobei $C = \frac{i}{2}$ zu setzen ist.

Die Diskussion[3]) der Formel (6) ergibt folgenden wichtigen Satz, der für die späteren Untersuchungen von grundlegender Bedeutung ist und den ich deshalb hier wörtlich zitieren möchte:

Satz I: *Wenn l_1 kmal durch ∞ und kmal durch 0, l_2 kmal durch ∞ und kmal durch 0 gegangen ist,*

1) Vergl. Hilb, Mathematische Annalen, Bd. 66, S. 222.
2) Vergl. Hilb, Mathematische Annalen, Bd. 66, S. 223.
3) Vergl. Hilb, Mathematische Annalen, Bd. 66, S. 224.

oder auch, wenn l_1 kmal durch ∞, aber nur k—1mal durch 0, l_2 dagegen $k + 1$ mal durch ∞ und kmal durch 0 gegangen ist, so ist der Winkel, welcher die Länge b' a' mifst, von der Form $\varphi = 2k\pi + \psi i$, wo ψ irgendeine reelle Gröfse ist. Geht nun im ersten Falle l_2 das $(k + 1)^{te}$ mal durch ∞, im 2. Falle l_1 das $k.^{te}$ mal durch 0, so ist $\varphi = 2k\pi$ und wächst, wenn sich l_1 und l_2 entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne weiterbewegen, alle dazwischen liegenden reellen Werte und nur diese annehmend, auf $\varphi = (2k + 1)\pi$, bis l_1 das $(k + 1)^{te}$ mal durch ∞ oder l_2 das $(k + 1)^{te}$ mal durch 0 geht. Welches von den beiden Ereignissen zuerst eintreffen mag, φ wird nach dem Eintreffen des einen bis zum Eintreffen des andern die Form haben $\varphi = (2k + 1)\pi + \psi i$, beim Eintreffen des anderen Ereignisses selbst wird wieder $\varphi = (2k + 1)\pi$ sein. Dann bleibt φ reell und erreicht den Wert $2(k + 1)\pi$, wenn l_1 das k^{te} mal durch 0 oder l_2 das $(k + 2)^{te}$ mal durch ∞ geht. Damit ist man aber wieder beim Ausgangspunkt des Satzes angekommen, wenn man nur k mit $k + 1$ vertauscht“.

Daraus ergibt sich der spezielle

Satz II: „*Wenn l_2 und l_1 von zwei zwischen 0 und ∞ liegenden Punkten ausgehend den Kreis der reellen Zahlen entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers beliebig oft derart durchlaufen, dafs l_2 immer vorausgeht, ohne l_1 je um einen ganzen Umlauf zu überholen, so nimmt φ jeden positiven reellen Wert mindestens einmal an.*“

Bei der Diskussion der Formel (7) ist derjenige Fall, bei welchem das Kreisbogenfünfeck einen Orthogonalkreis besitzt d. h. einen Kreis, auf welchem die fünf die Seiten des Kreisbogenfünfecks enthaltenden Kreise senkrecht stehen, von besonderem Interesse. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die

Existenz eines Orthogonalkreises ist, wie in der Annalenarbeit von Herrn Hilb allgemein (l. c. p. 225) gezeigt wird, folgende:

Es muß:

$$(8) \qquad l_1 \cdot l_2 = n_1 \cdot n_2$$

sein und eine analoge Beziehung muß auch für die übrigen Kantenlängen gleichzeitig gelten[1]).

§ 2.

Umformung der Differentialgleichung.

Wir setzen in unsere Differentialgleichung mit fünf singulären Stellen den Ausdruck

$$(9) \quad dt = \frac{dx}{|x-a|^{1-\alpha} \cdot |x-b|^{1-\beta} |x-c|^{1-\gamma} \cdot |c-d|^{1-\delta}}$$

ein, dann geht dieselbe über in:

$$(10) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha} \cdot |x-b|^{2-2\beta} \cdot |x-c|^{2-2\gamma} \cdot |x-d|^{2-2\delta}}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)} \cdot (Ax^2 + Bx + C)\, y = 0.$$

Unsere Gleichung (1) schreibt sich also durch diese Substitution in einfacherer Gestalt und wir wollen jetzt untersuchen, was aus den Koeffizienten A in unserer Gleichung (10) wird, wenn wir statt e irgend einen anderen singulären Punkt in das Unendliche werfen. Um äußerlich kenntlich zu machen, welcher von den singulären Punkten im Unendlichen liegt, wollen wir den Größen A, B, C diesen im Unendlichen gelegenen Punkt als Index beifügen und statt

---

1) Diese Bedingung wurde im Falle von 4 singulären Punkten zuerst von Herrn Klein aufgestellt und Involutionsbedingung genannt.

A, B, C die Größen A_c, B_c, C_c einführen, wenn c ein solcher Punkt ist.

Wollen wir beispielshalber den singulären Punkt a ins Unendliche werfen, so bedienen wir uns der Substitution:

$$z = -\frac{1}{x-a};$$

diese Größe führen wir an Stelle von x als neue Veränderliche ein, dann geht unsere obige Differentialgleichung in eine andere ganz analoger Art über, die die singulären Stellen

$$\bar{a} = \infty; \quad \bar{b} = \frac{1}{a-b}; \quad \bar{c} = \frac{1}{a-c}; \quad \bar{d} = \frac{1}{a-d} \quad \text{und } \bar{e} = 0$$

besitzt. Dabei ändert sich die Ungleichung $a > b > c > d$ wie folgt: $\bar{b} > \bar{c} > \bar{d} > \bar{e}$.

Die Ausrechnung ergibt folgendes:

$$\frac{1}{x-a} = -z \text{ oder } x = a - \frac{1}{z}.$$

$$\frac{1}{x-b} = \frac{1}{(a-b)-(a-x)} = \frac{\frac{1}{a-x} \cdot \frac{1}{a-b}}{\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a-b}} = \frac{\bar{b}\,z}{z-\bar{b}}$$

und analog:

$$\frac{1}{x-c} = \frac{\bar{c}\,z}{z-\bar{c}} \text{ und } \frac{1}{x-d} = \frac{\bar{d}\,z}{z-\bar{d}}.$$

Ferner ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{(a-x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{1}{(a-x)^4} + 2\,\frac{dy}{dz}\,\frac{1}{(a-x)^3}$$

oder kürzer geschrieben:

$$y' = z^2 y_z' \text{ und } y'' = z^4 y_z'' + 2\,z^3 y_z'.$$

Setzen wir das in unsere Differentialgleichung ein, so erhalten wir:

$$y_z'' z^4 + 2 y_z' z^3 + y_z' z^2 \cdot \left(-(1-\alpha) z + \frac{(1-\beta)\bar{b}z}{z-\bar{b}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1-\gamma)\bar{c}z}{z-\bar{c}} + \frac{(1-\delta)\bar{d}z}{z-\bar{d}} \right) - yz \frac{\bar{b}z \cdot \bar{c}z \cdot \bar{d}z}{(z-\bar{b})(z-\bar{c})(z-\bar{d})} \cdot$$

$$\cdot \left(A_e \left(a - \frac{1}{z}\right)^2 + B_e \left(a - \frac{1}{z}\right) + C_e \right) = 0$$

oder:

$$y_z'' + y_z' \left[\frac{2}{z} - \frac{1-\alpha}{z} + \frac{(1-\beta)\bar{b}}{(z-\bar{b})z} + \frac{(1-\gamma)\bar{c}}{(z-\bar{c})z} + \frac{(1-\delta)\bar{d}}{(z-\bar{d})z} \right] +$$

$$+ \frac{-y\bar{b}\bar{c}\bar{d}z}{z(z-\bar{b})(z-\bar{c})(z-\bar{d})} \cdot \left(A_e \left(a - \frac{1}{z}\right)^2 + B_e \left(a - \frac{1}{z}\right) + C_e \right) = 0.$$

Statt der Ausdrücke:

$\frac{(1-\beta)\bar{b}}{(z-\bar{b})z}$ können wir setzen: $(1-\beta)\left[\frac{1}{z-\bar{b}} - \frac{1}{z}\right]$ und

unsere Gleichung nimmt dann folgende Gestalt an:

$$y_z'' + y_z' \left[\frac{1+\alpha}{z} + \frac{1-\beta}{z-\bar{b}} - \frac{1-\beta}{z} + \frac{1-\gamma}{z-\bar{c}} - \frac{1-\gamma}{z} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\delta}{z-\bar{d}} - \frac{1-\delta}{z} \right] + \frac{-\bar{b}\bar{c}\bar{d}yz}{z(z-\bar{b})(z-\bar{c})(z-\bar{d})} \cdot$$

$$\cdot \left[A_e \left(a - \frac{1}{z}\right)^2 + B_e \left(a - \frac{1}{z}\right) + C_e \right] = 0$$

oder:

$$y_z'' + y_z' \left[\frac{1-\beta}{z-\bar{b}} + \frac{1-\gamma}{z-\bar{c}} + \frac{1-\delta}{z-\bar{d}} + \frac{1-(\varepsilon' + \varepsilon'')}{z} \right] -$$

$$- \frac{\bar{b}\bar{c}\bar{d}yz}{z(z-\bar{b})(z-\bar{c})(z-\bar{d})} \left(A_e \left(a - \frac{1}{z}\right)^2 + B_e \left(a - \frac{1}{z}\right) + C_e \right) = 0.$$

In dieser Gleichung setzen wir jetzt noch $y = z^{\varepsilon''} y_1$, dann nimmt diese, wenn wir die Werte:

$$y' = y_1' z^{\varepsilon''} + \varepsilon'' y_1 z^{\varepsilon''-1}$$

und $$y'' = y_1'' z^{\varepsilon''} + 2\varepsilon'' y_1' z^{\varepsilon''-1} + \varepsilon''(\varepsilon''-1) y_1 z^{\varepsilon''-2}$$

substituieren, die Form an:

$$y_1'' z^{\varepsilon''} + y_1' \left[2\varepsilon'' z^{\varepsilon''-1} + z^{\varepsilon''} \left(\frac{1-\beta}{z-\bar{b}} + \frac{1-\gamma}{z-\bar{c}} + \frac{1-\delta}{z-\bar{d}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1-(\varepsilon'+\varepsilon'')}{z} \right) \right] + y_1 \left[\varepsilon''(\varepsilon''-1) z^{\varepsilon''-2} + \varepsilon'' z^{\varepsilon''-1} \left\{ \frac{(1-\beta)}{z-\bar{b}} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1-\gamma}{z-\bar{c}} + \frac{1-\delta}{z-\bar{d}} + \frac{1-(\varepsilon'+\varepsilon'')}{z} \right\} - \frac{\bar{b}\bar{c}\bar{d} z^{\varepsilon''} z}{z(z-\bar{b})(z-\bar{c})(z-\bar{d})} \cdot$$

$$\left. \cdot \left(A_e \left(a - \frac{1}{z}\right)^2 + B_e \left(a - \frac{1}{z}\right) + C_e \right) \right] = 0$$

oder:

$$y_1'' + y_1' \left[\frac{2\varepsilon''}{z} + \left(\frac{1-\beta}{z-\bar{b}} + \frac{1-\gamma}{z-\bar{c}} + \frac{1-\delta}{z-\bar{d}} + \frac{1-(\varepsilon'+\varepsilon'')}{z} \right) \right] +$$

$$+ y_1 \left[\frac{\varepsilon''(\varepsilon''-1)}{z^2} + \frac{\varepsilon''}{z} \left(\frac{1-\beta}{z-\bar{b}} + \frac{1-\gamma}{z-\bar{c}} + \frac{1-\delta}{z-\bar{d}} + \frac{1-(\varepsilon'+\varepsilon'')}{z} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\bar{b}\bar{c}\bar{d} z}{z(z-\bar{b})(z-\bar{c})(z-\bar{d})} \left(A_e \left(a - \frac{1}{z}\right)^2 + B_e \left(a - \frac{1}{z}\right) + C_e \right) \right] = 0.$$

Schließlich können wir durch Ausmultiplizieren des letzten eckigen Klammerausdruckes und geeignetes Zusammenfassen entsprechender Glieder diese Gleichung noch wesentlich vereinfachen und bekommen zuletzt eine unserer ursprünglichen Gleichung (1) ganz analoge:

$$(11) \qquad y_1'' + y_1' \left[\frac{1-\beta}{z-\bar{b}} + \frac{1-\gamma}{z-\bar{c}} + \frac{1-\delta}{z-\bar{d}} + \frac{1-\varepsilon}{z} \right] +$$

$$\left. + \frac{y_1}{z(z-\bar{b})(z-\bar{c})(z-\bar{d})} \left(A_a z^2 + B_a z + C_a \right) \right] = 0,$$

deren Koeffizienten A_a, B_a und C_a bestimmten Gleichungen genügen, die wir im folgenden ableiten wollen. Durch Ausmultiplizieren des genannten Klammerausdruckes ergibt sich:

$$\frac{y_1}{z(z-\bar{b})(z-\bar{c})(z-\bar{d})} \cdot \Big[-\frac{\varepsilon'\varepsilon''}{z}(z-\bar{b})(z-\bar{c})(z-\bar{d})$$

$$+(1-\beta)\varepsilon''(z-\bar{c})(z-\bar{d})+(1-\gamma)\varepsilon''(z-\bar{b})(z-\bar{d})$$

$$+(1-\delta)\varepsilon''(z-\bar{b})(z-\bar{c})-\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,z\left(A_e\left(a-\frac{1}{z}\right)^2\right.$$

$$\left.+B_e\left(a-\frac{1}{z}\right)+C_e\right)\Big] = \frac{y_1}{z(z-\bar{b})(z-\bar{c})(z-\bar{d})}.$$

$$\cdot\Big[-\varepsilon'\varepsilon''\left(z^2-z(\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})+(\bar{b}+\bar{c})\bar{d}-\frac{\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}}{z}\right)$$

$$+(1-\beta)\varepsilon''\bar{c}\,\bar{d}-z(\bar{c}+\bar{d})\varepsilon''(1-\beta)+z^2\varepsilon''(1-\beta)$$

$$+(1-\gamma)\varepsilon''\bar{b}\,\bar{d}-z(\bar{b}+\bar{d})\varepsilon''(1-\gamma)+z^2\varepsilon''(1-\gamma)$$

$$+(1-\delta)\varepsilon''\bar{b}\,\bar{c}-z(\bar{b}+\bar{c})\varepsilon''(1-\delta)+z^2\varepsilon''(1-\delta)$$

$$-\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,z\,A_e a^2+2A_e a\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}-A_e\frac{1}{z}\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}-B_e a\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,z$$

$$+B_e\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}-C_e\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\Big] = \frac{y_1}{z(z-\bar{b})(z-\bar{c})(z-\bar{d})}.$$

$$\cdot\Big[z^2\varepsilon''(1-\beta+1-\gamma+1-\delta-\varepsilon')+z\{(\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})A_e$$

$$-(\bar{c}+\bar{d})\varepsilon''(1-\beta)-(\bar{b}+\bar{d})\varepsilon''(1-\gamma)-(\bar{b}+\bar{c})\varepsilon''(1-\delta)$$

$$-\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}(A_e a^2+B_e\cdot a+C_e)\}+\{-(\bar{b}+\bar{c})\bar{d}\,A_e$$

$$+(1-\beta)\varepsilon''\bar{c}\,\bar{d}+(1-\gamma)\varepsilon''\bar{b}\,\bar{d}+(1-\delta)\varepsilon''\bar{b}\,\bar{c}$$

$$+\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}(2A_e a+B_e)\}\Big]$$

Setzen wir diesen umgeformten Ausdruck in unsere vorherige Differentialgleichung ein und vergleichen mit (11) so ergeben sich nachfolgende Bedingungen:

$$A_a = \varepsilon''(\alpha + \varepsilon'').$$

$$\begin{aligned} B_a = & (\bar{b} + \bar{c} + \bar{d})\, A_e - (\bar{c} + \bar{d})\, \varepsilon''(1-\beta) \\ (12) \qquad & -(\bar{b} + \bar{d})\, \varepsilon''(1-\gamma) - (\bar{b} + \bar{c})\, \varepsilon''(1-\delta) \\ & - \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,(A_e a^2 + B_e a + C_e) \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_a = & -[(\bar{b} + \bar{c})\,\bar{d} + \bar{b}\,\bar{c}]A_e + (1-\beta)\varepsilon''\,\bar{c}\,\bar{d} \\ & + (1-\gamma)\,\varepsilon''\,\bar{b}\,\bar{d} + (1-\delta)\,\varepsilon''\,\bar{b}\,\bar{c} \\ & + \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,(2\,A_e a + B_e). \end{aligned}$$

Diese Rechnungsmethode läßt sich ohne besondere Schwierigkeiten auch auf Differentialgleichungen mit mehr singulären Stellen anwenden. Führt man die Ausrechnung für eine solche mit n singulären Punkten durch, so findet man für die Parameter der letzteren nachfolgendes einfaches Bildungsgesetz (13).

Die Differentialgleichung mit n singulären Punkten habe folgende Form:

$$y''_z + y'_z \left[\frac{1-\beta}{z-\bar{b}} + \frac{1-\gamma}{z-\bar{c}} + \ldots + \frac{1-\mu}{z-\bar{m}} + \frac{1-(\nu'+\nu'')}{z}\right] -$$

$$- \frac{y z^{n-4}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d} \ldots \bar{m}}{z(z-\bar{b}) \ldots\ldots (z-\bar{m})} \left[A_n \left(a - \frac{1}{z}\right)^{n-3} + B_n^{n-4} \left(a - \frac{1}{z}\right)^{n-4} + \right.$$

$$\left. \ldots + B_n^{o}\right] = 0.$$

Substituiert man nun wiederum

$$y = z^{\nu''} y_1,$$

so ergibt sich für die Parameter A_a, B_a^{n-4} ... bis .. B_a^{o} das System (13)

$$A_a = \nu''(\alpha + \nu'').$$

$$B_a^{n-4} = A_n \Sigma C_1^{n-2}(\bar b \ldots\ldots \bar m) - \nu'' \Big[(1-\beta)\sum_{\bar b'} C_1^{n-3}(\bar b \ldots \bar m) +$$

$$+(1-\gamma)\sum_{\bar c'} C_1^{n-3}(\bar b\ldots\bar m)+\ldots+(1-\mu)\sum_{\bar m'} C_1^{n-3}(\bar b\ldots\bar m)\Big] -$$

$$-\Sigma C_{n-2}^{n-2}(\bar b\ldots\bar m)\cdot\Big\{A_n a^{n-3} + B_n^{n-4} a^{n-4} + \ldots$$

$$+B_n^1 a + B_n^0\Big\}$$

$$B_a^{n-5} = -A_n \Sigma C_2^{n-2}(\bar b\ldots\bar m)+\nu''\Big[(1-\beta)\sum_{\bar b'}C_2^{n-3}(\bar b\ldots\bar m)+$$

$$+(1-\gamma)\sum_{\bar c'}C_2^{n-3}(\bar b\ldots\bar m)+\ldots(1-\mu)\sum_{\bar m'}C_2^{n-3}(\bar b\ldots\bar m)\Big]+$$

$$+\Sigma C_{n-2}^{n-2}(\bar b\ldots\bar m)\Big\{\binom{n-3}{1}A_n a^{n-4} + \binom{n-4}{1} B_n^{n-4} a^{n-5} +$$

$$\ldots+\binom{2}{1}B_n^2 a + B_n^1\Big\}$$

$$B_a^{n-6}=A_n\Sigma C_3^{n-2}(\bar b\ldots\bar m)-\nu''\Big[(1-\beta)\sum_{\bar b'}C_3^{n-3}(\bar b\ldots\bar m)+$$

$$+(1-\gamma)\sum_{\bar c'}C_3^{n-3}(\bar b\ldots\bar m)+\ldots+(1-\mu)\sum_{\bar m'}C_3^{n-3}(\bar b\ldots\bar m)\Big]-$$

$$-\Sigma C_{n-2}^{n-2}(\bar b\ldots\bar m)\Big\{\binom{n-3}{2}A_n a^{n-5}+\binom{n-3}{2}B_n^{n-4}a^{n-6}+$$

$$\ldots+\binom{2}{2}B_n^2 a^0\Big\}$$

bis

$$B_a^0=(-1)^n\Big[A_n\Sigma C_{n-3}^{n-2}(\bar b\ldots\bar m)-\nu''\Big\{(1-\beta)\sum_{\bar b'}C_{n-3}^{n-3}(\bar b\ldots\bar m)+$$

$$+(1-\gamma)\sum_{\bar c'}C_{n-3}^{n-3}(\bar b\ldots\bar m)+\ldots(1-\mu)\sum_{\bar m'}C_{n-3}^{n-3}(\bar b\ldots\bar m)\Big\}-$$

$$-\Sigma C_{n-2}^{n-2}(\bar b\ldots\bar m)\Big\{\binom{n-3}{n-4}A_n a + B_n^{n-4}\Big\}\Big],$$

wobei beispielshalber $\Sigma C_3^{n-2}(\bar{b} \ldots \bar{m})$ folgende Bedeutung hat:

Es ist: $\Sigma C_3^{n-2}(\bar{b} \ldots \bar{m}) =$ Summe der Kombinationen von n—2 Elementen $(\bar{b} \ldots \bar{m})$ zur 3. Klasse. Ist dabei irgend ein Element, z. B. $\bar{g}$ auszulassen, so ist dasselbe unter dem Summenzeichen mit einem Strich versehen $(\Sigma_{\bar{g}'})$ hingeschrieben; es läßt sich daher aus dem Schema (13) das Bildungsgesetz deutlich erkennen.

Kehren wir wieder zur Betrachtung der Differentialgleichung mit fünf singulären Stellen zurück, so spielen jetzt nach der Transformation die Intervalle $(\bar{b}, \bar{c})$, $(\bar{c}, \bar{d})$ und $(\bar{d}, \bar{e})$ dieselbe Rolle wie vorher die entsprechenden Intervalle (a, b), (b, c) und (c, d).

Wir sehen also, daß das Verhalten der Lösungen vom Vorzeichen der Parameter A abhängig ist.

Wenn daher die Parameter A_e und A_a das gleiche Vorzeichen besitzen, so können wir alle Eigenschaften der Lösungen der Gleichung (1) in den Intervallen (a, b), (b, c) und (c, d) unmittelbar als Sätze über das Verhalten der Lösungen der transformierten Gleichung (11) für die Intervalle $(\bar{b}, \bar{c})$, $(\bar{c}, \bar{d})$ und $(\bar{d}, \bar{e})$ aussprechen.

Transformieren wir der Reihe nach alle fünf singulären Punkte ins Unendliche, so ergeben sich für die A folgende Relationen:

$$\varepsilon''(\alpha + \varepsilon'') = A_a; \quad \varepsilon''(\beta + \varepsilon'') = A_b; \quad \varepsilon''(\gamma + \varepsilon'') = A_c;$$
$$\varepsilon''(\delta + \varepsilon'') = A_d; \; \varepsilon' \cdot \varepsilon'' = A_e.$$

Je nachdem nun die A positiv oder negativ sind, ergeben sich nachfolgende drei Fälle:

I. Fall: A_e sei positiv und die Summe der Exponenten $\alpha + \beta + \gamma + \delta < 3$:

Nach Relation (3) ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon' + \varepsilon'' \varepsilon = 3$ und $\varepsilon' \cdot \varepsilon'' = A_e$. Da nun nach Voraussetzung A_e positiv sein soll, so folgt, daß ε' und ε'' entweder beide positiv oder beide negativ sein müssen. Aus der Ungleichung $\alpha + \beta + \gamma + \delta < 3$ ergibt sich jedoch ohne weiteres, daß ε, und ε'' nur positive Größen sein können. Nach den Ungleichungen (2) sind aber auch alle übrigen Exponentendifferenzen positiv, also sind bei dieser Voraussetzung sämtliche Größen A positiv und wir haben den

Satz III: *„Ist $A_e > o$ und $\alpha + \beta + \gamma + \delta < 3$, so sind auch A_a, A_b, A_c und A_d positiv.*

Desgleichen gilt die Umkehrung dieses Satzes:

„Sind alle A positive Gröfsen, so ist immer $\alpha + \beta + \gamma + \delta < 3$“.

Denn da $A_e > 0$ sein soll, so sind, wie eben angegeben, sowohl ε' als ε'' entweder beide positiv oder beide negativ. Im ersten Falle würde die Behauptung ohne weiteres folgen, da ja $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon' + \varepsilon'' = 3$ sein muß. Wären da gegen ε' und ε'' beide negativ, so wäre $\alpha + \beta + \gamma < 3$ und $\alpha + \beta + \gamma + \delta - | \varepsilon' + \varepsilon'' | = 3$; somit $\delta - | \varepsilon' + \varepsilon'' | > 0$; d. h. $\delta > | \varepsilon' + \varepsilon'' |$. Ebenso beweist man, daß die übrigen Exponentendifferenzen α, β und γ größer als $| \varepsilon' + \varepsilon'' |$ sind. Wenn also ε' und ε'', und damit $\alpha + \beta + \gamma + \delta > 3$, wären, so bekämen wir als Resultat, daß A_a, A_b, A_c und A_d negativ sein müßten, und das würde der Voraussetzung widersprechen.

II. Fall: A_e sei positiv und die Summe der Exponenten $\alpha + \beta + \gamma + \delta > 3$.

In diesem Falle folgt sofort aus (3) $\alpha + \beta + \gamma + + \delta + \varepsilon' + \varepsilon'' = 3$, daß $\varepsilon' + \varepsilon'' < 0$, also ε' und ε'' negative Größen sind. Ferner ist, wie wir eben bei dem Beweise der Umkehrung des Satzes III gesehen haben, jede der Größen α, β, γ und δ größer als $|\varepsilon' + \varepsilon''|$; also ist sicher $(\alpha + \varepsilon'') > 0$; $(\beta + \varepsilon'') > 0$; $(\gamma + \varepsilon'') > 0$ und $(\delta + \varepsilon'') > 0$ und damit $A_a < 0$; $A_b < 0$ und $A_d < 0$. Daher

Satz IV: *„Ist $A_e > 0$ und $\alpha + \beta + \gamma + \delta > 3$, so sind alle übrigen A negative Gröfsen und umgekehrt. Ist $A_a < 0$; $A_b < 0$; $A_c < 0$ und $A_d < 0$; dagegen $A_e > 0$ so ist sicherlich $\alpha + \beta + \gamma + \delta > 3$“.*

Der Beweis der Umkehrung folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß ε' und ε'' negative Größen sein müssen, da sonst aus dem vorhergehenden Satze folgen würde, daß die Größen A_a, A_b A_c und A_d positiv sind.

Nehmen wir jetzt den Fall, daß A_e negativ ist; dann sind zwei Möglichkeiten denkbar.

Entweder es sind alle A_a, A_b, A_c, A_d und A_e negativ, oder es ist zum mindesten eine dieser Größen positiv. Tritt der letztere Fall ein, so haben wir ein Analogon zu Fall I oder II. Da aber immer eine Größe A_e nach Vorgabe negativ ist, so ist der Fall I ausgeschlossen. Es gilt somit der Satz V, den wir im folgenden beweisen wollen.

Satz V: *„Ist $A_e < 0$, so sind entweder alle anderen 4 Gröfsen A_a, A_b, A_c und A_d auch negativ, oder zum mindesten 4 von ihnen“.*

Nach Relation (3) ist $\varepsilon' - \varepsilon'' = \varepsilon$ und ε selbst genügt der Ungleichung $0 \leqq \varepsilon < 1$. Es kann also, da nach Voraussetzung doch $A_e < 0$ sein soll, nur ε'' negativ sein. Sind schließlich die übrigen Faktoren $(\alpha + \varepsilon'') > 0$,

$(\beta + \varepsilon'') > 0$, $(\gamma + \varepsilon'') > 0$ und $(\delta + \varepsilon'') > 0$, was eintreten kann, so haben wir den

III. Fall: $A_a < 0$; $A_b < 0$; $A_c < 0$; $A_d < 0$ und $A_e < 0$.

Jetzt könnte aber auch die Möglichkeit eintreten, daß z. B. zwei der Faktoren $(\alpha + \varepsilon'')$, $(\beta + \varepsilon'')$, $(\gamma + \varepsilon'')$ und $(\delta + \varepsilon'')$ negative Werte annehmen, dann müßte aber nach unseren früheren Relationen sein:

$$\alpha + \varepsilon'' + \beta + \varepsilon'' + \gamma + \delta + \varepsilon' - \varepsilon'' = \alpha + \beta + \gamma + \\ + \delta + \varepsilon' + \varepsilon'' = 3.$$

Wenn also beispielshalber $\alpha + \varepsilon''$ und $\beta + \varepsilon''$ negativ sein sollen, so müßte notwendigerweise $\gamma + \delta + + \varepsilon' - \varepsilon'' > 3$ sein; das ist aber unmöglich, da nach den Ungleichungen (2) alle 3 Größen α, β und $\varepsilon' - \varepsilon'' = \varepsilon$ kleiner als 1 sind. Das gilt noch um so mehr, falls mehr als 2 der Faktoren $(\alpha + \varepsilon'')$, $(\beta + \varepsilon'')$, $(\gamma + \varepsilon'')$ und $(\gamma + \varepsilon'')$ negativ sein sollten. Es kann also nur noch der Fall eintreten, daß $(\alpha + \varepsilon'') < 0$, wenn α die kleinste der auftretenden Exponentendifferenzen bedeutet, denn in diesem Falle müßte $\beta + \gamma + \delta + + \varepsilon' + \varepsilon'' > 3$ sein, was wohl möglich sein kann. Damit ist auch der 2. Teil des Satzes bewiesen.

Ganz genau so sind die Betrachtungen für den Fall, daß wir es mit n singulären Stellen zu tun haben. Auch hier treten lediglich diese drei charakteristischen Fälle auf.

§ 3.

Oszillationsbetrachtungen[1]).

Wir gehen dabei aus von der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \psi(t; A, B) y = 0, \tag{14}$$

wo z. B. $\psi(t; A, B)$ mit dem Koeffizienten von y in unserer transformierten Differentialgleichung (10) identisch sein kann und betrachten den Quotienten $\frac{Y'}{Y} = z$ irgend einer Partikularlösung derselben, dann ist[2]):

$$\frac{d}{dt}\frac{Y'}{Y} = \frac{Y''}{Y} - \left(\frac{Y'}{Y}\right)^2 = -\psi(t; A, B) - \left(\frac{Y'}{Y}\right)^2$$

oder in kürzerer Form geschrieben:

$$\frac{dz}{dt} = -\psi(t; A, B) - z^2. \tag{15}$$

Jetzt führen wir ein rechtwinkeliges Koordinatensystem (x, z) ein. Die ganze reelle x-Achse wird dann bekanntlich durch die singulären Punkte der Differentialgleichung in Intervalle zerlegt, die aufeinanderfolgend verschiedenes Verhalten zeigen oder wie wir nach Herrn Hilb sagen wollen, verschiedene Signatur haben[3]). Wesentlich für die Beurteilung der Signatur eines Intervalles ist lediglich der Ausdruck:

$$S(x) = \frac{|x-a|^{2-2\alpha}\,|x-b|^{2-2\beta}\,|x-c|^{2-2\gamma}\,|x-d|^{2-2\delta}}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)}, \tag{16}$$

wie er in Gleichung (10) vorkommt. Wir definieren:

---

1) Dieser Paragraph enthält eine, wie mir scheint, neue Ableitung der Sturmschen Sätze und zwar in einer für das Folgende unmittelbar brauchbaren Form.

2) Vergl. Autograph. Vorlesungsheft über lineare Differentialgleichung, 2. Ordg., S. 280.

3) Vergl. math. Ann. Bd. 68 p. 56.

„Ist $S(x)$ in irgend einem Intervall positiv, so sagen wir, das Intervall hat positive Signatur. Ist $S(x)$ dagegen negativ, so sprechen wir von einem Intervall mit negativer Signatur“.

Daraus ergibt sich unmittelbar

Satz VI: *„Zwei benachbarte Intervalle haben entgegengesetzte Signatur“.*

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir jetzt unsere Gleichung (14) dazu verwenden, um in irgend einem Intervalle der reellen x-Achse Oszillationsbetrachtungen anzustellen. Wir greifen zu diesem Zwecke beispielshalber das Intervall c d heraus. Nach den Relationen (5) des ersten Paragraphen lassen sich dann die Fundamentallösungen im Punkte d folgendermaßen ausdrücken:

$$\overset{d}{Y}_{\delta}(x) = \overset{c}{Y}_{\gamma}(x) - l_1 \overset{c}{Y}_{o}(x) \text{ und } \overset{d}{Y}_{o}(x) = \overset{c}{Y}_{\gamma}(x) - l_2 \overset{c}{Y}_{o}(x).$$

Bilden wir von diesen Fundamentallösungen den Quotienten $z = \frac{Y'}{Y}$ an der Stelle d, so ergeben sich die Werte:

$$z_{I}(d) = \frac{\frac{d}{dt}\overset{d}{Y}_{\delta}(d)}{\overset{d}{Y}_{\delta}(d)} = \infty \text{ und } z_{II}(d) = \frac{\frac{d}{dt}\overset{d}{Y}_{o}(d)}{\overset{d}{Y}_{o}(d)} = 0$$

wenn wir die Normierung von $\overset{d}{Y}_{\delta}(d)$ und $\frac{d}{dt}\left(\overset{d}{Y}_{o}(d)\right)$ in der im § 1 festgesetzten Weise treffen.

An der Stelle c erhält der Quotient die Werte:

$$z_{I}(c) = \frac{\frac{d}{dt}\overset{d}{Y}_{\delta}(c)}{\overset{d}{Y}_{\delta}(c)} = \frac{\frac{d}{dt}\overset{c}{Y}_{\gamma}(c) - l_1 \frac{d}{dt}\overset{c}{Y}_{o}(c)}{\overset{c}{Y}_{\gamma}(c) - l_1 \overset{c}{Y}_{o}(c)} = \frac{1}{l_1} \text{ und}$$

$$z_{II}(c) = \frac{\frac{d}{dt} \overset{d}{Y}_o(c)}{\overset{d}{Y}_o(c)} = \frac{\frac{d}{dt} \overset{c}{Y}_\gamma(c) - l_2 \frac{d}{dt} \overset{c}{Y}_o(c)}{\overset{c}{Y}_\gamma(c) - l_2 \overset{c}{Y}_o(c)} = \frac{1}{l_2}$$

Nehmen wir nun an, daß der Faktor $\psi(t; A, B)$ im ganzen Intervalle negativ sei, dann kann weder z_I noch z_{II} im Innern dieses Intervalles unendlich groß noch Null werden, denn solange $z^2 > |\psi|$ ist, ist $\frac{dz}{dt}$ negativ, also nimmt z beständig ab und solange $z^2 < |\psi|$ ist, ist $\frac{dz}{dt}$ positiv und z nimmt immerfort zu.

Am Anfang des Intervalles ist $z_I > z_{II}$ und wir können behaupten, daß diese Ungleichung für das ganze Intervall durchweg erfüllt ist. In der Tat. In der Umgebung der Stelle d ist sicher noch $z_I > z_{II}$. Würde nun an irgend einer Stelle $z_I = z_{II}$ werden, so wäre dort sicher auch $\frac{dz_I}{dt} = \frac{dz_{II}}{dt}$ und dasselbe gilt von allen höheren Ableitungen. Es müßte also z_I mit z_{II} identisch sein, was aber unmöglich ist.

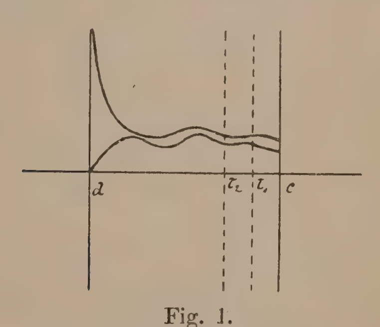


Fig. 1.

In nebenstehender Figur wollen wir den ungefähren Verlauf der beiden Kurven z_I und z_{II} graphisch darstellen. Die Kurve, die den Quotienten z_I repre-

sentiert, liegt im ganzen Intervalle oberhalb der Kurve z_{II}. An der Stelle c ist somit:

$$\frac{1}{l_1} > \frac{1}{l_2} \text{ oder } l_2 > l_1.$$

Da ferner die beiden Kurven im ganzen Intervalle oberhalb der x-Achse, wenn man cd als solche einführt, verlaufen, so können wir folgern, daß sowohl l_1 wie l_2 positive Größen sind. Wir haben somit den Satz gewonnen:

Satz VII: *„Wenn im Intervalle cd ψ beständig einen negativen Wert besitzt, so sind l_1 und l_2 positive Gröſsen und zwar ist immer $l_2 > l_1$. Für das Kreispolygon auf der η-Kugel heiſst das nichts anderes, als daſs sich die Seitenlänge cd in der Form $\varphi = \psi i$ darstellen läſst, wo φ irgend eine reelle Gröſse bedeutet.“*

Wie verhalten sich nun aber l_1 und l_2, wenn der Faktor ψ unserer Differentialgleichung immer mehr wächst und schließlich in einem Teil des Intervalles genügend groß geworden ist? Wir werden im folgenden nachweisen, daß in diesem Falle l_1 und l_2 den Kreis der reellen Zahlen beliebig oft durchlaufen. Um dabei aber ein Maß für die Zahl der Umläufe zu haben, wählen wir eine Funktion, die während der Oszillation beständig wächst und zwar bei jeder Halboszillation um die Einheit. Der Wert von $z = \frac{Y'}{Y}$ geht dabei von $+\infty$ nach $-\infty$. Eine solche Funktion ist:

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(-\frac{Y'}{Y}\right) \tag{17}$$

Herr Klein gibt diese Funktion in seinen Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen[1]) als ein

1) Vgl. p. 281 (autographiertes Vorlesungsheft).

Maß für die Stärke der Oszillation zweier Kurven innerhalb eines abgegrenzten Intervalles an. Er hat jedoch dabei eine weitere Betrachtung dieser Funktion nicht durchgeführt und in der Tat kommt auch die wahre Bedeutung des arcustangens hier erst bei unseren jetzigen Betrachtungen so recht zum Durchbruch. Es gibt uns nämlich diese Funktion direkt die Zahl der Überschlagungen unserer Kreisbogenpolyogonseiten an, was aus dem folgenden hervorgehen wird.

Durch geeignetes Umformen der Gleichung (15) erhalten wir eine Gleichung für arctg und zwar ist:

$$-\frac{dz}{dt} = \psi + z^2.$$

Addieren und subtrahieren wir auf der rechten Seite 1 und dividieren durch $1 + z^2$, so bekommen wir:

$$-\frac{\frac{dz}{dt}}{1+z^2} = \frac{\psi - 1}{1+z^2} + 1 \text{ oder } \frac{d}{dt}\operatorname{arctg}(-z) = \frac{\psi - 1}{1+z^2} - 1.$$

Setzen wir darin noch $-\frac{Y'}{Y} = z_1$, um die Gleichung bequemer diskutieren zu können, so schreibt sich dieselbe in der Form:

$$(18) \qquad \frac{d}{dt}\operatorname{arctg} z_1 = \frac{\psi - 1}{1+z_1^2} + 1.$$

Im obigen Intervalle cd wächst also arctg z_1, solange ψ positiv ist; denn $\frac{-1}{1+z_1^2} + 1$ ist immer größer, höchstens gleich Null. Ist dagegen ψ in irgend einem Teil des Intervalles negativ, so kann arctg z_1 auch abnehmen. Ist z_1 das erstemal unendlich groß geworden, so definieren wir: arctg $z_1 = \frac{\pi}{2}$. Die Funk-

tion arctg z_1 kann nämlich nur dann die Form $k \cdot \frac{\pi}{2}$, wo k irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, annehmen, wenn z_1 unendlich groß wird. Sobald nun aber $|z_1|$ genügend große Werte annimmt, wird der Ausdruck $\left| \frac{\psi - 1}{1 + z_1^2} \right|$ beliebig klein, also sicher kleiner als 1. Das sagt aus, daß die Ableitung von arctg z_1 positiv ist und daß arctg z_1 immer weiter zunimmt. Es kann somit arctg z_1 nie auf einen Wert $k \cdot \frac{\pi}{2}$ herabsinken, sondern es kann einen solchen Wert immer nur im Wachsen erreichen.

Wir betrachten jetzt das Teilintervall $\tau_1 \tau_2$. In diesem soll ψ_1 durchaus positiv und größer als ψ sein. Dann vergleichen wir die beiden Ausdrücke arctg $\bar{z}_1$ und arctg z_1, die den beiden Differentialgleichungen

$$(19) \qquad \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \bar{z}_1 = \frac{\psi_1 - 1}{1 + \bar{z}_1^2} + 1 \text{ und}$$
$$\frac{d}{dt} \operatorname{arctg} z_1 = \frac{\psi - 1}{1 + z_1^2} + 1$$

genügen, unter der Voraussetzung, daß arctg z_1 und arctg $\bar{z}_1$ in τ_1 denselben Anfangswert haben.

Es folgt unmittelbar, daß in der Umgebung der Stelle τ_1

$$(20) \qquad \operatorname{arctg} \bar{z}_1 > \operatorname{arctg} z_1$$

ist, da ja das erstere an dieser Stelle rascher wächst als das letztere und es bleibt auch arctg $\bar{z}_1$ sicherlich solange größer als arctg z_1, bis $\bar{z}_1 = z_1$ wird. Dieses ist aber unmöglich, denn arctg $\bar{z}_1$ hat an dieser Stelle eine größere Ableitung als arctg z_1. Würden sich also die beiden Werte arctg $\bar{z}_1$ und arctg z_1 einander

beliebig naherücken, so würde im nächsten Augenblick $\operatorname{arctg} \bar{z}_1$ eine größere Ableitung besitzen als $\operatorname{arctg} z_1$ und daher wieder schneller wachsen als letztere. Ein Gleichwerden ist somit ausgeschlossen.

Wir können daher allgemein den Satz aussprechen:

Satz VIII: „*Ist ψ_1 in einem Intervalle $\tau_1 \tau_2$ durchaus größer als ψ, so ist bei gleichen Anfangswerten in τ_1 $\operatorname{arctg} \bar{z}_1 > \operatorname{arctg} z_1$, und wir können allgemein ψ_1 so bestimmen, daß der Wert von $\operatorname{arctg} \bar{z}_1$ größer als eine vorgegebene Zahl m ist.*“

Um den zweiten Teil dieses Satzes zu beweisen, setzen wir in (15) für ψ den Wert k^2, so erhalten wir als allgemeine Lösung der Gleichung $y'' + k^2 y = 0$ den Ausdruck:

$$Y_2 = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt.$$

Setzen wir darin $c_1 = r \sin k\alpha$ und $c_2 = r \cos k\alpha$ und bilden den Quotienten $z_2 = -\frac{Y_2'}{Y_2}$, so ist:

$$z_2 = -\frac{kr(\sin k\alpha \cos kt - \cos k\alpha \sin kt)}{r(\sin k\alpha \sin kt + \cos k\alpha \cos kt)} = -k\frac{\sin k(\alpha - t)}{\cos k(\alpha - t)}$$

oder $z_2 = -k \operatorname{tg} k(\alpha - t)$ und somit $\operatorname{arctg} \frac{z_2}{k} = k(t - \alpha)$.

Um den Wert α zu berechnen, setzen wir $t = \tau_1$, dann ist:

$$-\frac{1}{k} \operatorname{arctg}\left(\frac{z_2(\tau_1)}{k}\right) + \tau_1 = \alpha.$$

Wir betrachten diesen Ausdruck im Intervalle $\tau_1 \tau_2$. Es ist:

$$\operatorname{arctg} \frac{z_2(\tau_2)}{k} = k(\tau_2 - \tau_1) + \operatorname{arctg} \frac{z_2(\tau_1)}{k}.$$

An der Stelle τ_1 ist nun der Wert des $\operatorname{arctg}\frac{z_2(\tau_1)}{k}$ sicherlich größer als $-\frac{\pi}{2}$. Wir können somit die Größe k^2 immer so bestimmen, daß der Wert von $\operatorname{arctg}\frac{z_2(\tau_2)}{k}$ größer als eine vorgegebene Zahl m ist. Es bezeichne nun, wie gewöhnlich, $[\operatorname{arctg} z_2]$ die größte in $\operatorname{arctg} z_2$ enthaltene ganze Zahl, dann ist für jede endliche Zahl k bei geeignet zugeordnetem Anfangswerte (d. i. wenn wir im Anfangspunkte $[\operatorname{arctg} z_2(\tau_1)] = \left[\operatorname{arctg}\frac{z_2(\tau_1)}{k}\right]$ setzen) und gleicher Festsetzung über die Fortsetzung stets $[\operatorname{arctg} z_2] = \left[\operatorname{arctg}\frac{z_2}{k}\right]$, da ja die ganzen Zahlen nur für $z_2 = \infty$ angenommen werden.

Wenn nun im ganzen Intervalle $\tau_1\,\tau_2$ die Funktion $\psi_1 > k^2$ ist, so folgt aus dem ersten schon bewiesenen Teil des Satzes VIII, daß speziell auch

$$\operatorname{arctg} \bar{z}_1 > \operatorname{arctg} z_2$$

ist und daher $[\operatorname{arctg} \bar{z}_1] > m$. Da nun, wenn wir über τ_2 hinausgehen $[\operatorname{arctg} \bar{z}_1]$ nicht abnehmen kann, so ist $[\operatorname{arctg} \bar{z}_1]$ im ganzen Restintervalle τ_2 d größer als m und dasselbe gilt a fortiori von $\operatorname{arctg} \bar{z}_1$.

Die arctg-Funktion gibt uns also gleichzeitig ein Maß für die Zahl der Oszillationen.

Speziell können wir daraus folgende Sätze entnehmen, wenn wir für ψ den Koeffizienten von y in (10) nehmen:

Satz IX: „*Lassen wir B und C wachsen, d. h. nimmt die Funktion ψ beständig zu, so wachsen auch l_1 und l_2 und durchlaufen den Kreis der reellen Zahlen*

entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers beliebig oft. Nimmt dagegen die Funktion ψ *und damit auch B und C beständig ab, so nehmen auch* l_1 *und* l_2 *immerzu ab. Man kann also* ψ *so wählen, dafs die Seite* $c' d'$ *den Kreis der reellen Zahlen eine gegebene Zahl mal umspannt. Speziell kann man* ψ *auch so bestimmen, dafs die Seite* $c' d'$ *eine gegebene reelle Seitenlänge* φ *besitzt.*"

Künftighin wollen wir nun für die Intervalle folgende Bezeichnungen einführen.

Wir werden ein Intervall, z. B. c d, in dem keine der vier Fundamentallösungen, die zu c und d gehören, im Innern verschwindet und bei dem alle Größen l positiv sind, ein „nichtoszillatorisches" Intervall nennen. Wenn in einem Intervall der Koeffizient von y durchaus negativ ist, so nennen wir das Intervall „durchaus nichtoszillatorisch". Ein durchaus nichtoszillatorisches Intervall ist a fortiori nichtoszillatorisch.

Ist eine der Größen l durch unendlich gegangen, so nennen wir das Intervall „wirklich oszillatorisch".

Ist schließlich der Faktor von y für einen ersten Fall durchaus größer als der Faktor in einem zweiten Falle, so sagen wir das Intervall sei für den ersten Fall „stärker oszillatorisch" als für den zweiten.

An diesen Definitionen wollen wir bei den folgenden Betrachtungen durchweg festhalten.

Bevor wir nun zu den Untersuchungen einer Differentialgleichung mit fünf singulären Stellen schreiten, wollen wir noch die Spezialfälle einer Differentialgleichung mit vier singulären Stellen behandeln, bei welchen die Exponentendifferenzen Null auftreten.

Dieselben lassen sich durch Grenzübergang aus dem allgemeinen Falle ableiten; sie sind jedoch bei

direkter Behandlung für das Oscillationstheorem von Interesse, zumal dabei bei den verschiedenen Fällen immer wieder andere Schwierigkeiten zu überwinden sind.

§ 4.

Untersuchung der Spezialfälle einer Differentialgleichung mit vier singulären Stellen, wenn Exponentendifferenzen Null auftreten.

Bei den Untersuchungen, die Herr Hilb in seiner eingangs erwähnten Annalenarbeit durchgeführt hat, wurde das Auftreten der Exponentendifferenzen Null in den Ungleichungen (2) der Bequemlichkeit halber ausgeschlossen. Dabei fallen bekanntlich die beiden gewöhnlichen Fundamentallösungen, die zu einem solchen singulären Punkte gehören, in eine Lösung zusammen und es tritt daneben eine neue Lösung mit einem logarithmischen Gliede auf, wodurch dann Spezialuntersuchungen nötig werden, sofern wir diese Fälle nicht als Grenzfälle des allgemeinen Falles auffassen wollen. Wir wollen daher im folgenden diese direkt behandeln.

Dabei werden wir uns der nämlichen Nomenklatur wie im allgemeinen Falle bedienen. Es werden sich dann gemäß der Festsetzungen (5) die beiden Fundamentallösungen im Punkte a, wenn wir beispielshalber $\alpha = 0$ setzen, in der Form Y^{a}_{0} darstellen lassen, und daneben wird noch eine neue Lösung, die wir mit $Y^{a}_{\log}$ bezeichnen wollen, auftreten.

Infolge des Zusammenfallens der gewöhnlichen Lösungen wird auch a_1 mit a_2 und damit l_1 und l_2 zusammenfallen und die Achse des Kerns wird an dieser

Stelle zur Kugeltangente werden. Die Abbildung durch den Quotienten η gibt daher an dieser Stelle des Kreisbogenvierecks statt einer Ecke eine Spitze.

Es handelt sich nun darum, den akzessorischen Parameter B unserer Differentialgleichung in den Spezialfällen, bei denen das zugehörige Kreisbogenviereck Spitzen hat, so zu bestimmen, daß zu demselben ein Orthogonalkreis gehört, auf welchem die Spitzen liegen. Sobald nun aber eine Kante zur Exponentendifferenz Null gehört, erleidet die Bestimmung des Parameters eine Änderung und wir haben daher, je nach der Zahl der auftretenden Exponentendifferenzen Null, nachfolgende Fälle zu unterscheiden:

1. drei aufeinanderfolgende Kanten gehören zu Spitzen,

2. zwei aufeinanderfolgende Kanten gehören zu Spitzen, die dritte Kante ist eine gewöhnliche,

3. die erste und dritte Kante gehören je zu einer Spitze, die zweite ist eine gewöhnliche,

4. die erste Kante gehört zu einer Spitze, die zweite und dritte sind gewöhnliche Kanten und

5. die zweite Kante gehört zu einer Spitze, die erste und dritte sind gewöhnliche Kanten.

Hier bei dem Falle von vier singulären Punkten ist eine Fallunterscheidung in solcher Ausdehnung nicht absolut notwendig, wohl aber läßt sie sich im allgemeinen Falle nicht vermeiden, weshalb wir sie explizete durchführen wollen.

Wir wollen jetzt die einzelnen Fälle diskutieren:

I. Fall: Dieses ist der Fall, den Herr Hilbert in Angriff genommen hat — (vergl. Klein l. c. pag. 181) und der den Anstoß zur Wiederaufnahme der ganzen Theorie gegeben hat. Herr Hilbert hat nämlich für

diesen Fall ein Fortsetzungsprinzip angegeben, welches uns erlaubt, die Fundamentallösungen über die singulären Stellen fortzusetzen, ein Prinzip, welches dann für den allgemeinen Fall von Herrn Klein aufgestellt und geometrisch interpretiert worden ist.

Die Regel, die Herr Hilbert für die Fortsetzung irgend einer Partikularlösung Y über einen singulären Punkt, z. B. b, gegeben hat, ist folgende:

Liegt in einem Intervalle ac die singuläre Stelle b, so kann man Y rechts von b in der Form darstellen:

$$(21) \qquad Y^{b}_{\log} = \mathfrak{P}_1(x-b) + \log(x-b)\,\mathfrak{P}_2(x-b),$$

wo $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gewöhnliche Potenzreihen bedeuten; links von b hat es dann die Form:

$$(21) \qquad Y^{b}_{\log} = \mathfrak{P}_1(x-b) + \log(b-x)\,\mathfrak{P}_2(x-b).$$

Analog gilt diese Festsetzung für die übrigen singulären Punkte. Dies hat für den Quotienten $\eta = \frac{Y^b_o}{Y^b_{\log}}$ folgende Bedeutung:

Bei der gewöhnlichen Fortsetzung erhält man einen Kreis, der den gegebenen berührt; führen wir dagegen das Hilbertsche Fortsetzungsprinzip ein, so erhalten wir aus dem η der konformen Abbildung, das wir im Augenblicke als $\bar{\eta}$ bezeichnen wollen, ein η, welches im Intervalle ab mit $\bar{\eta}$ übereinstimmt, im Intervalle bc jedoch mit η durch die Substitution $\bar{\eta} + i\pi$ zusammenhängt[1]), also durch eine parabolische Substitution mit der Tangente im Berührpunkt als Achse

---

1) Vergl. Klein l. c., p. 184.

entsteht. Da aber unser η durchaus reell ist, so kann das nur die Bedeutung haben, daß wir diesen Kreisbogen bc in den Kreis, welcher a'b' trägt, d. h. in den Kreis der reellen Zahlen hineingedreht haben.

Für den ersten Fall wird sich unsere Differentialgleichung (1) in folgender einfacher Gestalt ausdrücken lassen:

$$(22) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}\right)\frac{dy}{dx} + \\ + \frac{y}{(x-a)(x-b)(x-c)}(Ax + B) = 0.$$

Der Geraden $Ax + B$ geben wir zunächst die Anfangslage durch b, bei der beide Intervalle durchaus nichtoszillatorisch sind. Das zu unserer Differentialgleichung (22) gehörige Kreisbogenviereck hat dann drei Spitzen und im allgemeinen eine gewöhnliche Ecke. Die zu den Spitzen gehörigen Kanten[1]) des Kerns werden zu Kugeltangenten. Wenn nun das Viereck einen Orthogonalkreis haben soll, so müssen sich diese letzteren in einem Punkte schneiden. Von einem Punkte außerhalb eines Kreises gibt es aber nur zwei Tangenten an diesen; es müssen daher notwendig zwei dieser Tangenten zusammenfallen. Welche Bedeutung hat nun aber dieses Zusammenfallen?

Die beiden Fundamentallösungen in den Punkten a und c lassen sich folgendermaßen ausdrücken:

$$\overset{a}{\underset{o}{Y}} = \overset{b}{\underset{o}{Y}} - l_1 \overset{b}{\underset{\log}{Y}} \quad \text{und} \quad \overset{c}{\underset{o}{Y}} = \overset{b}{\underset{o}{Y}} - n_1 \overset{b}{\underset{\log}{Y}}.$$

---

1) Die Frage nach den Kantenlängen verliert auf einer solchen Tangente den Sinn, wenn wir uns unserer gewöhnlichen projektiven Maßbestimmung bedienen wollen, da von den im Doppelverhältnis auftretenden vier Punkten zwei zusammenfallen und daher der Wert des Doppelverhältnisses immer 1 wird.

Wenn also beispielshalber die Tangente durch c mit der durch a zusammenfällt, so wird $Y_0^a = Y_0^c$ werden, d. h. es muß $l_1 = n_1$ sein. Tritt die andere Möglichkeit ein, daß eine der Tangenten durch a und c mit der durch b zusammenfällt, so muß entweder l_1 oder n_1 gleich Null sein. Diese beiden Bedingungsgleichungen geometrisch interpretiert sagen aus, daß entweder eine Lösung existieren muß, die in a und c endlich ist und in b eine Untetigkeitsstelle besitzt oder daß eine Lösung existiert, die in a und b bezw. b und c endlich ist.

Um nun den Verlauf der Fundamentallösungen Y_0^a und Y_0^c in den Intervallen ab und bc näher untersuchen zu können, bringen wir die Gleichung (22) auf die Normalform, indem wir

$$dt = \frac{dx}{|x-a|\ |x-b|\ |x-c|}$$

setzen und erhalten:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (x-a)(x-b)(x-c)(Ax+B)y = 0. \tag{23}$$

Da die Gerade $Ax + B$ die Anfangslage besitzen soll, so ist der Koeffizient von y in beiden Intervallen ab und bc durchaus negativ. Verfolgen wir nun z. B. die Lösung Y_0^c, die in c einen endlichen Wert etwa $+1$ haben soll im Intervalle bc, so ist:

$$\left(\frac{d}{dt} Y_0^c(x)\right)_{x=c} = \left(\frac{d}{dx} Y_0^c(x)\right)_{x=c} \cdot \frac{dx}{dt} = \tag{24}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(Y_0^c(x)\right)_{x=c} \cdot \left[\,|x-a|\ |x-b|\ |x-c|\,\right]_{x=c} = 0.$$

Aus der Differentialgleichung (23) selbst ersehen wir unmittelbar, daß die zweite Ableitung der Lösung

Y_0^c positiv ist. Es wächst also die erste Ableitung und wird positiv. Y_0^c muß somit beständig zunehmen und im Intervalle b c beständig positiv bleiben. Für $x = b$ nimmt nun die Funktion Y_0^c einen positiv unendlich großen Wert an; denn würde sie in Y_0^b übergehen, so müßte nach obigem die erste Ableitung verschwinden, während sie ja immer positiv sein muß. Der Koeffizient von log $(x—c)$ ist also an der betreffenden Stelle negativ. Nach dem Hilbertschen Fortsetzungsprinzip wird nun aber im Intervalle a b die Funktion Y_0^c mit dem gleichen Werte, aber unendlich großer negativer Ableitung fortgesetzt. Da die Funktion Y_0^c selbst und ebenso ihre zweite Ableitung positiv sind, so wächst $\frac{d}{dt} Y_0^c$ beständig, also sinkt die Kurve immer langsamer. Es können dann zwei Möglichkeiten eintreten. Entweder verschwindet die erste Ableitung innerhalb des Intervalles, während die Funktion selbst noch positiv ist, dann wächst sie wieder und wird positiv unendlich, oder aber die Funktion Y_0^c selbst wird Null, während die erste Ableitung noch negativ ist. Dann nimmt diese letztere immer stärker ab, wird also immer stärker negativ und Y_0^c wird schließlich negativ unendlich. Der in beiden Fällen mögliche Verlauf der Funktion Y_0^c ist aus nachfolgender Figur [1]) ersichtlich.

Fernerhin handelt es sich jetzt darum, den gegenseitig möglichen Verlauf von Y_0^c und Y_0^a zu untersuchen.

---

1) In den Zeichnungen sind die Intervalle $t_c\ t_b$, $t_b\ t_a$, welche eigentlich unendlich groß wären, der Anschaulichkeit halber als endliche Intervalle gezeichnet.

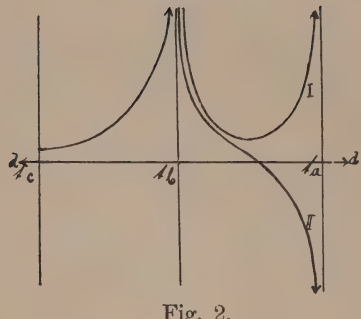


Fig. 2.

Wir wollen zeigen, daß wenn bei der Anfangslage der Geraden für die Lösung Y_0^c der eine Fall (z. B. I) eintritt, für die Lösung Y_0^a der entgegengesetzte Fall (II) eintreten muß. Dabei verfahren wir folgendermaßen.

Es sei $$L(u) \equiv \frac{d^2u}{dt^2} + \psi(t)\, u = 0,$$

wo $\psi(t)$ eine stetige Funktion von t ist, dann gilt bekanntlich die Identität:

$$\int_{t_1}^{t_2} (v\, L(u) - u\, L(v))\, dt = \left[v \frac{du}{dt} - u \frac{dv}{dt} \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Wir wählen jetzt für u die in c und für v die in a endliche Lösung und setzen:

$$u(x) = \mathfrak{P}(x-c) = \mathfrak{P}_0^c \text{ und } v(x) = \mathfrak{P}(x-a) = \mathfrak{P}_0^a.$$

Diese beiden Lösungen wollen wir so normieren, daß sie in den Punkten c bezw. a beide den konstanten Wert $+1$ annehmen. Es lassen sich dann diese Lösungen an den entgegengesetzten singulären Stellen folgendermaßen ausdrücken:

$$u(x) = \varrho\, \mathfrak{P}_0^a + \sigma\, \mathfrak{P}_{\log}^a \text{ und } v(x) = \varrho_1\, \mathfrak{P}_0^c + \sigma_1\, \mathfrak{P}_{\log}^c.$$

Wir müssen dabei die Funktionen $\mathfrak{P}_{\log}^a$ und $\mathfrak{P}_{\log}^c$ wie folgt normieren

$$\frac{d}{dt}\left(Y_{\log}^{c}(x)\right)_{x=c} = -1 \text{ und } \frac{d}{dt}\left(Y_{\log}^{a}(x)\right)_{x=b} = +1,$$

da wir ja dieselben an den betreffenden Stellen des Intervalles c bezw. a positiv unendlich angenommen haben und an dieser Festsetzung ein für allemal festhalten wollen.

Für das Intervall bc bekommen wir dann aus obiger Identität:

$$u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} = \text{const} = c_1$$

und für das Intervall ab entsprechend:

$$u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} = \text{const} = c_2$$

und es fragt sich, welcher Zusammenhang zwischen c_1 und c_2 besteht? An der Sprungstelle b ändern $\frac{du}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ das Vorzeichen, denn es läßt sich dort die Lösung $\mathfrak{P}_o^c$ in der Form darstellen:

$$Y_o^c = \varrho_2 Y_o^b + \sigma_2 Y_{log}^b.$$

Bilden wir, von links kommend, die erste Ableitung dieses Ausdrucks, so ist:

$$\frac{d}{dt}\left(Y_o^c(x)\right)_{x=b-\varepsilon} = \left[+\sigma_2 \frac{d}{dt} Y_{log}^b(x)\right]_{x=b-\varepsilon} =$$

$$= \left[-\sigma_2 \frac{1}{b-x} \cdot |x-a|\,|b-x|\,|x-c|\right]_{x=b-\varepsilon}.$$

Im Intervalle ab erhält der Ausdruck den Wert:

$$\frac{d}{dt}\left(Y_o^c(x)\right)_{x=b+\varepsilon} = \left[\sigma_2 \frac{d}{dt} Y_{log}^b(x)\right]_{x=b+\varepsilon} =$$

$$= \left[\sigma_2 \frac{1}{x-b} \cdot |x-a|\,|x-b|\,|x-c|\right]_{x=b+\varepsilon}.$$

Es ist also:

$$\frac{d}{dt}\left(Y_o^c(x)\right)_{x=b-\varepsilon} = -\frac{d}{dt}\left(Y_o^c(x)\right)_{x=b+\varepsilon} \tag{25}$$

und dasselbe gilt für die Ableitung von $\left(Y^a_o(x)\right)_{\substack{x = b - \varepsilon \\ x = b + \varepsilon.}}$

Es ist somit: $c_1 = - c_2$ oder

$$(26) \qquad \left[u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt}\right]_a = - \left[u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt}\right]_c.$$

Berechnen wir jetzt diese Klammerausdrücke für unsere obigen Lösungen, dann ergibt sich:

$$(27) \qquad - \sigma = + \sigma_1.$$

σ und σ_1 haben somit verschiedenes Vorzeichen und damit ist unsere oben ausgesprochene Behauptung bewiesen. Wird also die Lösung Y^c_o an der Stelle a positiv unendlich, so wird Y^a_o an der Stelle c gerade negativ unendlich und umgekehrt. Bei der Anfangslage der Geraden werden also Y^a_o und Y^c_o den in Figur 3 gezeichneten Verlauf haben, wenn wir den einen Fall annehmen, daß im Intervall ba die Ableitung der Funktion Y^c_o früher Null wird als die Funktion selbst.

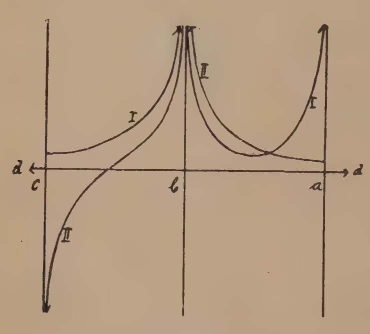


Fig. 3.

Wenn wir jetzt die Gerade von ihrer Anfangslage genügend nach abwärts bewegen, so wird das Intervall ba beliebig stark, das Intervall bc immer schwächer oszillatorisch werden. Y^c_o wird also die im Intervalle bc

schematisch gezeichnete Lage im wesentlichen beibehalten. Im Intervalle ab hat diese Lösung sicherlich eine Nullstelle, wenn das Intervall genügend stark oszillatorisch geworden ist, denn nach dem Satze von Sturm hat zwischen zwei Nullstellen irgend einer Partikularlösung jede andere Lösung dieser Differentialgleichung sicher eine Nullstelle. Es fragt sich nun, wie diese Nullstelle überhaupt entstehen kann. Es sind nur zwei Möglichkeiten denkbar. Entweder entsteht sie im Innern des Intervalles selbst oder sie rückt von a aus herein. Nun ist aber die Funktion Y_0^c im ganzen Intervall ba positiv. Wenn sie daher an irgend einer Stelle im Innern des Intervalles bei Veränderung des Parameters Null werden soll, so müßte sie an dieser Stelle eine zweifache Nullstelle besitzen. Es müßte also neben der Lösung auch noch die erste Ableitung verschwinden und damit überhaupt identisch gleich Null sein, was aber unmöglich ist. Es muß daher, damit eine Nullstelle überhaupt entstehen kann, der Faktor σ von log (x — a), der eine ganze Funktion des Parameters ist, von einem negativen zu einem positiven Werte übergehen, also gleich Null werden und es ist $Y_0^c = Y_0^a$.

Damit ist also zunächst die Existenz des Grundtheorems, abgesehen von den Eindeutigkeitsfragen, die wir nachfolgend behandeln wollen, bewiesen. Beim Grundtheorem haben wir somit den Verlauf, wie ihn Figur 4 zeigt.

Wenn wir nun die Gerade immer weiter nach ab wärts bewegen, so kommen wir zu den verschiedenen Klassen von Obertheoremen. Wir wollen jetzt vorübergehend wieder die Lösung Y_0^a betrachten, dann muß auch

diese bei genügender Abwärtsbewegung der Geraden im Innern des Intervalles ba eine Nullstelle bekommen. Es muß also eine Zwischenlage existieren, bei der gerade $Y_0^a = Y_0^b$ wird und das ist das erste Ober-

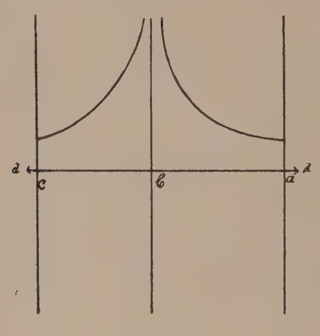


Fig. 4.

theorem. Bei dieser Lage der Geraden müssen dann Y_0^a und Y_0^c den in nachstehender Figur gezeichneten Verlauf haben, denn Y_0^c kann bei der Abwärtsbewegung der Geraden keine zweite Nullstelle gewonnen haben, da sonst zwischen den beiden Nullstellen von Y_0^c im Intervalle ab eine Nullstelle von Y_0^a liegen müßte, was aber in diesem Falle unmöglich ist.

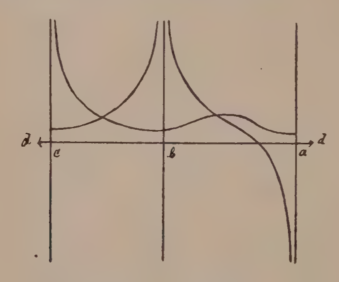


Fig. 5.

Erst jetzt, wenn wir die Gerade wiederum genügend weit nach abwärts verschieben, kann Y_0^c im Innern des

Intervalles eine zweite Nullstelle bekommen. Es muß daher vorher wiederum eine Lage geben, bei der gerade $Y^c_o = Y^a_o$ wird. Das ist das zweite Obertheorem. Die Lösung Y^a_o muß in diesem Falle zwischen den beiden Nullstellen von Y^c_o eine Null-Lage besitzen und kann außer dieser im Innern des Intervalles keine weitere Nullstelle bekommen. Den Verlauf der beiden Funktionen Y^c_o und Y^a_o im Falle des zweiten Obertheorems zeigt daher nachfolgendes Bild.

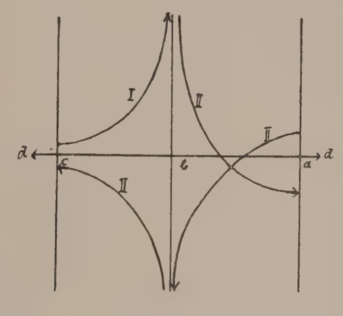


Fig. 6.

Indem wir jetzt so fortfahren und bei immer weiterer Abwärtsbewegung der Geraden einmal die eine Lösung Y^a_o, das anderemal die andere Y^c_o betrachten, erhalten wir die ganze Serie der Obertheoreme bezüglich des Intervalles b a; analoge Obertheoreme ergeben sich bezüglich des Intervalles b c.

Aus diesen Betrachtungen ersehen wir, daß durch das Zusammenfallen der Tangenten in den Punkten a und c das Grundtheorem und die erste Serie der Obertheoreme für das Intervall a b charakterisiert ist, während durch das Zusammenfallen der Tangenten in den Punkten a und b eine zweite unendliche Serie von Obertheoremen für dasselbe Intervall zustande kommt.

Grundtheorem.

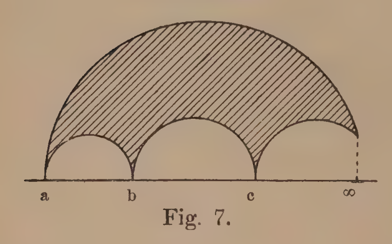


Fig. 7.

Die Figuren 7—9 geben uns ein geometrisches Bild von den Kreisbogenvierecken beim Grundtheorem und bei den ersten Obertheoremen. Der bequemen Zeichungsweise halber sind sie statt auf der Kugel in der komplexen η-Ebene gezeichnet.

I. Obertheorem.

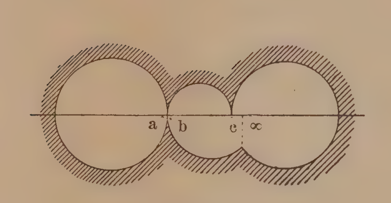


Fig. 8.

II. Obertheorem.

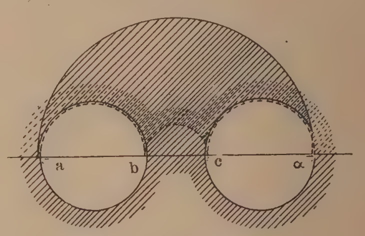


Fig. 9.

Daran anschließend wollen wir jetzt die Eindeutigkeit des Grundtheorems und der Obertheoreme beweisen. Wir gehen dabei, wie immer bei den Eindeutigkeitsfragen, von der Identität aus:

$$(28) \qquad \int_{t_1}^{t_2} (u\,L(v) - v\,L(u))\,dt = \left[u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt}\right]_{t_1}^{t_2}$$

und betrachten die Lösung Y_0^c für zwei verschiedene Lagen der Geraden $Ax + B$. Bei der einen Lage habe sie den Wert $(Y_0^c)_1$ und genüge der Differentialgleichung:

$$(29)\qquad L(u) = \frac{d^2u}{dt^2} + (x-a)(x-b)(x-c) A x u =$$
$$= - B_1 u (x-a)(x-b)(x-c)$$

bei der verschobenen Lage der Geraden sei der Wert $(Y_o^c)_2$ und die dazugehörige Differentialgleichung:

$$(30)\qquad L(v) = \frac{d^2v}{dt^2} + (x-a)(x-b)(x-c) A x v =$$
$$= - B_2 v (x-a)(x-b)(x-c).$$

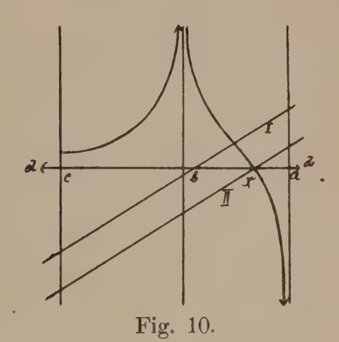


Fig. 10.

Wir wollen also jetzt annehmen, es gäbe zwei Lösungen $(Y_o^c)_1$ und $(Y_o^c)_2$, welche im Intervalle ba dieselbe erste Nullstelle X haben und im Intervalle bc überhaupt keine Nullstelle besitzen, oder aber, wie es beim Grundtheorem ist, daß beide Lösungen $(Y_o^c)_1$ und $(Y_o^c)_2$ an der Stelle a in die eine Lösung Y_o^a übergingen, dann folgt für die rechte Seite der Idendität (28), wenn wir $(Y_o^c)_1 = u$ und $(Y_o^c)_2 = v$ setzen, für das Intervall bc:

$$\left[u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt}\right]_c^b = \left[(Y_o^c)_1 \frac{d}{dt}(Y_o^c)_2 - (Y_o^c)_2 \frac{d}{dt}(Y_o^c)_1\right]_c^b =$$
$$= \left[(Y_o^c)_1 \frac{d}{dt}(Y_o^c)_2 - (Y_o^c)_2 \frac{d}{dt}(Y_o^c)_1\right]^{b-\varepsilon}$$

— denn an der unteren Grenze verschwindet der ganze Ausdruck, — für das Intervall ba:

$$\left[u\frac{dv}{dt}-v\frac{du}{dt}\right]_b^X=\left[(Y^c_o)_1\frac{d}{dt}(Y^c_o)_2-(Y^c_o)_2\frac{d}{dt}(Y^c_o)_1\right]_{b+\varepsilon}^X=$$

$$=\left[(Y^c_o)_1\frac{d}{dt}(Y^c_o)_2-(Y^c_o)_2\frac{d}{dt}(Y^c_o)_1\right]^X-$$

$$-\left[(Y^c_o)_1\frac{d}{dt}(Y^c_o)_2--(Y^c_o)_2\frac{d}{dt}(Y^c_o)_1\right]^{b+\varepsilon}.$$

Bilden wir die Differenz dieser beiden Ausdrücke, dann folgt:

$$\left[u\frac{dv}{dt}-v\frac{du}{dt}\right]_b^X-\left[u\frac{dv}{dt}-v\frac{du}{dt}\right]_c^b=$$

$$=\left[(Y^c_o)_1\frac{d}{dt}(Y^c_o)_2-(Y^c_o)_2\frac{d}{dt}(Y^c_o)_1\right]^X.$$

Da nun aber unserer Annahme gemäß die beiden Lösungen $(Y^c_o)_1$ und $(Y^c_o)_2$ im Punkte X verschwinden sollen, so muß diese Differenz den Wert Null annehmen.

Jetzt wollen wir für dieselben beiden Lösungen u und v die linke Seite der Identität (28) bilden und wiederum die beiden Ausdrücke voneinander subtrahieren, dann erhalten wir:

$$\int_b^X\Big((Y^c_o)_1\,B_2\,(Y^c_o)_2\,(a-x)\,(x-b)\,(x-c)-$$

$$-(Y^c_o)_2\,B_1\,(Y^c_o)_1\,(a-x)\,(x-b)\,(x-c)\Big)\,dt-$$

$$(31)\quad -\int_c^b\Big(-(Y^c_o)_1\,B_2\,(Y^c_o)_2\,(a-x)\,(b-x)\,(x-c)+$$

$$+(Y^c_o)_2\,B_1\,(Y^c_o)_1\,(a-x)\,(b-x)\,(x-c)\Big)\,dt=$$

$$=(B_2-B_1)\Big[\int_b^X(Y^c_o)_1\,(Y^c_o)_2\,(a-x)\cdot|x-b|\,(x-c)\,dt+$$

$$+\int_c^b (Y_o^c)_1 (Y_o^c)_2 (a-x)\,|x-b|\,(x-c)\,dt\Big] =$$

$$= (B_2 - B)_1 \int_c^X (Y_o^c)_1 (Y_o^c)_2 (a-x)\,|x-b|\,(x-c)\,dt.$$

Nun sind aber alle Größen unter dem Integralzeichen wesentlich positive Größen. Soll also das Produkt verschwinden, so muß $B_2 = B_1$ sein; d. h. die Nullstelle X kann nur bei einer Lage der Geraden $Ax + B$ erreicht werden.

Wir nehmen jetzt weiterhin an, daß die eine Lösung $(Y_o^c)_2$ zum ersten Male im Punkte X verschwinde, während die andere Lösung $(Y_o^c)_1$ noch einen positiven Wert besitzen soll. Dabei ist fernerhin die 1. Ableitung von $(Y_o^c)_2$ negativ. Die rechte Seite unserer obigen Identität (28) nimmt somit an der Stelle X einen negativen Wert an. Für die linke Seite kommt im wesentlichen nur das Vorzeichen von $B_2 - B_1$ in Betracht. Soll also die Differenz negativ sein, so muß $B_1 > B_2$ sein, d. h. die erste Nullstelle von $(Y_o^c)_1$ im Intervalle ba wandert mit abnehmenden Parameter B nach links.

Wir können nun aber auch den Schluß umkehren und sagen:

Wenn wir die Gerade $Ax + B$ nach abwärts verschieben, so ist an der ersten Nullstelle von $(Y_o^c)_2$ die andere Lösung $(Y_o^c)_1$ noch positiv mit negativer Ableitung.

Für die Lösung Y_o^a gilt nun das gewöhnliche Oszillationstheorem. Gäbe es daher für die beiden Lagen der Geraden je eine Lösung Y_o^a, die der Bedingung genügt $Y_o^a = Y_o^b$, so müßten diese beiden Lösungen im

Intervalle aX, die gleiche Anzahl von Nullstellen besitzen, da links von X der Annahme nach keine Nullstelle mehr liegen soll. Da nun aber $(Y_o^a)_2$ bereits im Punkte X die erste Nullstelle passiert, so müßte doch $(Y_o^a)_1$ im Innern des Intervalles aX eine Nullstelle mehr haben als $(Y_o^a)_2$, was aber unmöglich ist, da ja für B_1 das Intervall ba schwächer oszillatorisch ist als für B_2. Damit ist aber die Eindeutigkeit der Obertheoreme 1. Klasse erwiesen. Durch ganz genau dieselben Oszillationsbetrachtungen folgt auch die Eindeutigkeit der übrigen Obertheoreme.

II. Fall.

Das Kreisbogenviereck hat jetzt zwei aufeinanderfolgende Spitzen, indem zwei aufeinanderfolgende Winkel gleich Null sind, und eine gewöhnliche Ecke. Als letztere wählen wir a und setzen:

(32) $$\eta = \frac{Y_\alpha^a}{Y_o^a}$$

Wir können dann die in b und c endlich bleibenden Lösungen durch die beiden Fundamentallösungen des Punktes a, wie folgt, ausdrücken:

$$Y_o^b = Y_\alpha^a - l Y_o^a \text{ und } Y_o^c = Y_\alpha^a - n\, Y_o^a,$$

letzteres unter Anwendung des Hilbertschen Fortsetzungsprinzips, welches einer Drehung der Ebene bc in die Ebene ab entspricht [1]). Ferner wollen wir die Lösungen in a so normieren, daß

$$Y_o^a(a) = 1 \text{ und } \frac{d}{dt}(Y_\alpha^a(x))_{x=a} = -1$$

wird.

---

[2]) Vgl. I. Fall.

Da das Kreisbogenviereck wiederum einen Orthogonalkreis besitzen soll, so müssen sich die beiden Kanten in b und c, die in unserem jetzigen Falle Kugeltangenten sind, sowie die dritte Kante durch a in einem Punkte schneiden. Dabei können zwei verschiedene Fälle eintreten. Entweder es fallen die beiden Kugeltangenten zusammen, dann geht die in b endliche Lösung in die in c endliche Lösung über und es ist $l = n$, oder aber die beiden Tangenten haben symmetrische Lage, dann muß $l = -n$ sein, wie man aus nebenstehender Figur ersieht. Je nachdem nun die eine oder die andere der beiden Möglichkeiten eintritt, erhalten wir in den beiden Intervallen die verschiedenen Typen der Obertheoreme.

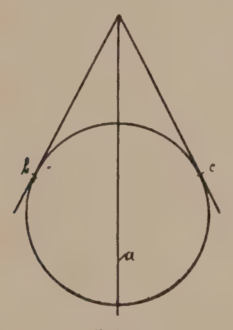


Fig. 11.

Verfolgen wir dies zunächst an der Figur eines Kreisbogenvierecks, das unseren Bedingungen entspricht, so ergibt sich, daß für das Grundtheorem sowie für die geradzahligen Obertheoreme des Intervalles b c die Tangenten getrennte Lage haben müssen, daß also $l = -n$ sein muß, während sie für die ungeradzahligen Obertheoreme dieses Intervalles zusammenfallen müssen, also $l = n$ sein muß. Im Intervalle b a

müssen bei sämtlichen Obertheoremen die Tangenten symmetrische Lage haben, was man wiederum unmittelbar aus der Kreisbogenfigur ersehen kann.

Wir wollen jetzt wie im ersten Falle den Verlauf der beiden Fundamentallösungen Y_0^c und Y_0^a in den Intervallen ab und bc untersuchen und bringen zu diesem Zwecke unsere Differentialgleichung durch die bekannte Substitution (9) auf die Normalform:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha}(x-b)(x-c)}{(x-a)}(Ax+B)\,y = 0$$

oder anders geschrieben:

$$(33)\quad L(u) \equiv \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha}(x-b)(x-c)}{x-a}Ax\,y =$$

$$= -By\frac{|x-a|^{2-2\alpha}(x-b)(x-c)}{x-a};$$

ziehen wir jetzt wieder unsere schon des öfteren angewandte Identität (28) zu Hilfe und bilden wieder die Differenz dieses Ausdrucks für beide Intervalle bc und ab, so erhalten wir:

$$\int_c^b (u\,L(v) - v\,L(u))\,dt - \int_b^a (u\,L(v) - v\,L(u))\,dt =$$

$$= \left[u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt}\right]_c^b - \left[u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt}\right]_b^a.$$

An der Stelle b heben sich die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite weg, so daß diese die einfache Form bekommt:

$$= -\left[u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt}\right]^c - \left[u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt}\right]^a.$$

Wir betrachten jetzt wiederum zwei verschiedene Lagen unserer Geraden $Ax + B$. Einmal sei in unserer

Differentialgleichung $B = B_1$, das andere Mal $B = B_2$. Im ersten Falle setzen wir die Lösung $(Y_o^c)_1 = u$, im zweiten Falle $(Y_o^c)_2 = v$, dann ist:

$$(34) \int_c^b \left[-(Y_o^c)_1 (Y_o^c)_2 B_2 \frac{|a-x|^{2-2\alpha} |b-x||x-c|}{|a-x|} + \right.$$

$$\left. + (Y_o^c)_2 (Y_o^c)_1 \; B_1 \frac{|a-x|^{2-2\alpha} |b-x||x-c|}{|a-x|} \right] dt +$$

$$+ \int_b^a \left[-(Y_o^c)_1 (Y_o^c)_2 B_2 \frac{|x-a|^{2-2\alpha} |x-b||x-c|}{|x-a|} + \right.$$

$$\left. + (Y_o^c)_1 (Y_o^c)_2 \; B_1 \frac{|x-a|^{2-2\alpha} |x-b||x-c|}{|x-a|} \right] dt =$$

$$= (B_1 - B_2) \int_c^a \frac{|x-a|^{2-2\alpha} |x-b||x-c|}{|x-a|} (Y_o^c)_1 (Y_o^c)_2 \; dt =$$

$$= - n_1 + n_2.$$

Ist jetzt $B_2 = B_1 + \varepsilon$ so wird die linke Seite des Ausdrucks negativ, da das Produkt unter dem Integralzeichen aus Gliedern besteht, die wesentlich positiv sind mit Ausnahme von Gliedern, die mit ε verschwinden, also nimmt mit wachsendem B die Größe n ab. Ebenso folgt, indem wir bloß das Intervall ba betrachten, daß mit wachsendem B die Größe l kontinuierlich abnimmt. Wir beherrschen somit das ganze Verhalten von l und n, wenn wir von einer geeignet gewählten Anfangslage der Geraden ausgehen. Wir wollen uns dabei ganz analoger Betrachtungen bedienen wie im ersten Falle.

Wir führen vorübergehend Werte $\overline{Y_{\log}^c}$ und $\overline{Y_o^c}$ ein, welche wir so normieren werden, daß

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{Y^{c}_{\log}}\right)_{x\,=\,c+\varepsilon} = -1 \text{ und } \overline{Y^{c}_{o}}\,(c) = +1$$

wird und setzen:

$$u\,(c) = \overline{Y^{c}_{o}}(c) \text{ und } v\,(a) = Y^{a}_{o}(a)$$

dann ist ferner noch:

$$u\,(x) = \overline{Y^{c}_{o}}\,(x) = \bar{\varrho}_1\, Y^{a}_{\alpha}\,(x) + \bar{\sigma}_1\, Y^{a}_{o}\,(x) \text{ und}$$

$$v\,(x) = Y^{a}_{o}\,(x) = \bar{\varrho}_2\, Y^{c}_{o}\,(x) + \bar{\sigma}_2\, \overline{Y^{c}_{\log}}\,(x).$$

Entsprechend dem Hilbertschen Fortsetzungsprinzip ist dann:

$$\left[u\,\frac{dv}{dt} - v\,\frac{du}{dt}\right]_c = \left[v\,\frac{du}{dt} - u\,\frac{dv}{dt}\right]_a$$

also:

(35) $$\bar{\sigma}_2 = \bar{\varrho}_1.$$

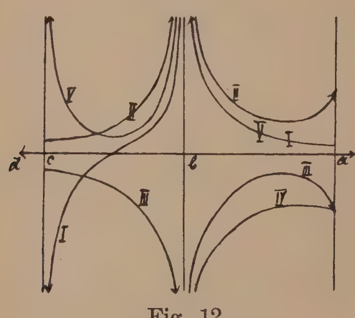


Fig. 12.

Hat daher unsere Gerade $Ax + B = z$ die Anfangslage durch b, bei der beide Intervalle ba und bc nichtoszillatorisch sind und hat die Lösung Y^{a}_{o} den Verlauf I in obenstehender Figur, bei welchem $\bar{\sigma}_2$ negativ ist, so ist auch $\bar{\varrho}_1$ negativ und die Ableitung von $(Y^{c}_{o}(x))_{x\,=\,a}$ an der Stelle $x = a$ ist positiv, da ja für $Y^{a}_{o}\,(a)$ und $\frac{d}{dt}\,(Y^{a}_{\alpha}\,(x))_{x\,=\,a}$ die frühere Normierung gelten

soll. Die Funktion $\overline{Y}_0^c$ hat somit den Verlauf II; denn hätte $\overline{Y}_0^c$ in a einen negativen Wert, so müßte, da doch das Intervall b a durchaus nichtoszillatorisch ist, die Ableitung auch negativ sein, was also auf einen Widerspruch führt. Da nun $\overline{Y}_0^c = \bar{\varrho}_1 Y_0^c$ ist, so folgt, daß $Y_0^c(a)$ in diesem Intervalle negativ ist, d. h. n ist positiv. Wir haben also für die Lösung Y_0^c die Lage III. Lassen wir jetzt B abnehmen, so wird das Intervall b c immer schwächer oszillatorisch; es muß daher n beständig zunehmen. Schließlich wird $Y_0^c = Y_\alpha^a$, also $n = 0$; d. h. in der Zwischenzeit muß n durch ∞ gegangen sein und alle Werte von $-\infty$ bis 0 durchlaufen haben. Bevor jedoch n durch ∞ hindurchgegangen ist, hat $-n Y_0^a$ den Verlauf IV, denn in der Nähe des Punktes a muß IV unterhalb der Kurve III liegen, da ja die Ableitung von Y_0^c positiv und die von $Y_0^a = 0$ ist, und außerdem kann die Differenz der beiden Lösungen zwischen a und b zunächst keine Nullstelle besitzen, da sonst jede Lösung eine Nullstelle hätte. Es können also die beiden Lösungen Y_0^a und Y_0^b nicht proportional werden, d. h. es kann die Größe l nicht durch ∞ gehen, bevor n das erste Mal hindurchgegangen ist. Also wird gerade beim Durchgang von n durch ∞ die Größe l sicher positiv sein.

Wir wollen jetzt zunächst weiter untersuchen, was eintritt, wenn die Lösung Y_0^a statt I den Verlauf V hat. Dann verschieben wir die Gerade von der Anfangslage nach aufwärts, so daß das Intervall b c immer stärker, das Intervall b a immer schwächer oszillatorisch wird. Dann gibt es schließlich eine Lage, bei der Y_0^c proportional Y_0^a wird, so daß $n = \infty$ ist. Dabei ist l be-

ständig positiv, da ja das Intervall ba durchaus nicht-oszillatorisch ist.

In beiden Fällen werden sich also die beiden Werte l und n bei weiterer Verkleinerung des Parameters B auf dem Kreise der reellen Zahlen entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers bewegen, ohne daß jemals der eine den anderen einholen kann. Es sind dann zwei Fälle möglich; entweder wird zuerst l unendlich groß und nachher erst $n = 0$ oder es ist gerade umgekehrt. In beiden Fällen muß es dann eine und nur eine Zwischenlage geben, bei der gerade $l = -n$ ist und damit ist die Existenz des Grundtheorems für unseren zweiten Fall erwiesen. Der Eindeutigkeitsbeweis geht genau wie im allgemeinen Falle[1]).

Wenn wir jetzt die Gerade $Ax + B = z$ immer noch weiter nach abwärts verschieben, so werden n und l immer weiter wachsen und schließlich den Kreis der reellen Zahlen beliebig oft durchlaufen. Auf diese Weise bekommen wir die ganze Reihe der Obertheoreme bezüglich des Intervalles ba, bei denen immer $l = -n$ ist. Daraus ersehen wir, daß beim Grundtheorem wie bei dieser Serie von Obertheoremen die Tangenten in b und c immer eine symmetrische Lage haben müssen.

Beim Grundtheorem, sowie bei den ersten Obertheoremen des ersten Typus wird also das Kreisbogenviereck, das wir der Bequemlichkeit halber wieder in der η-Ebene zeichnen wollen, folgende Gestalt haben:

Grundtheorem.

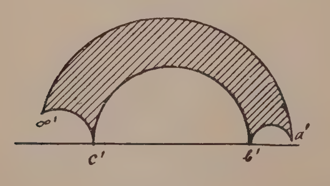


Fig. 13.

1) Vergl. Hilb: math. Ann. 1908 pg. 241.

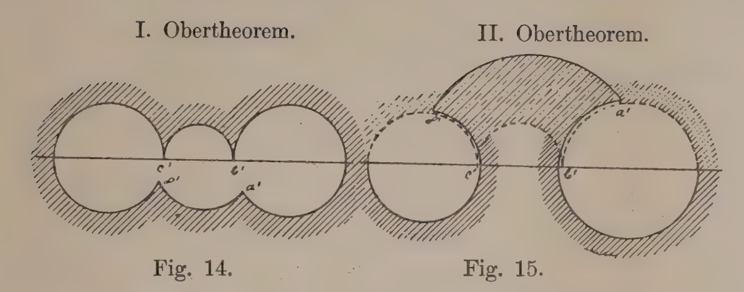


Fig. 14. Fig. 15.

Um nun die Obertheoreme für das Intervall b c zu bekommen, werden wir die Gerade $z = Ax + B$ in beiden Fällen von dem Punkte aus, wo n durch ∞ ging, nach oben verschieben. Die Größen l und n nehmen dann beständig ab. l ist jetzt stets positiv und n durchläuft dabei bei genügender Aufwärtsbewegung der Geraden den Kreis der reellen Zahlen im Uhrzeigersinn. Es gibt somit im Intervalle b c zwei Typen von Obertheoremen. Bei den einen, den ungeradzahligen, ist $l = n$, — die Tangenten müssen also zusammenfallen —, bei den anderen, den geradzahligen ist wie beim Grundtheorem $l = -n$. Die Tangenten haben also hier getrennte Lage.

Das Kreisbogenviereck hat in diesen beiden Fällen nachfolgende Gestalt:

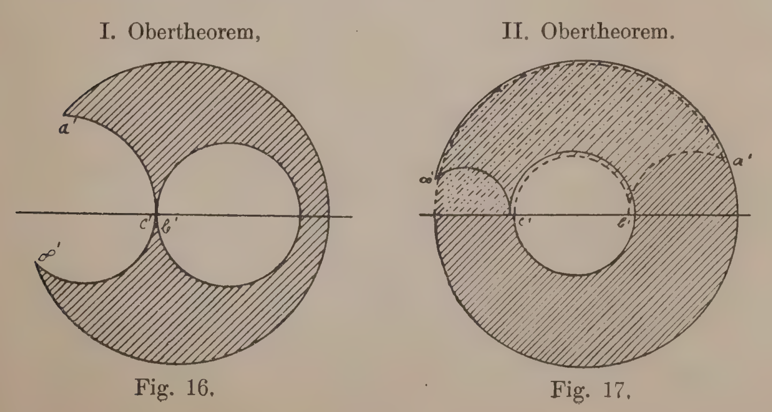


Fig. 16. Fig. 17.

Die Eindeutigkeit aller Obertheoreme in den beiden Intervallen läßt sich genau wie im allgemeinen Falle beweisen.

III. Fall:

Die erste und dritte Kante gehört zu einer Spitze, die zweite Kante ist eine gewöhnliche. Dieser Fall ist der leichteste und wir wollen ihn daher mit wenigen Worten erledigen. Die Ecke gehöre zu b'. Wir setzen dann:

$$\eta = \frac{Y^b_\beta}{Y^b_o} \tag{36}$$

und drücken die in a und c endlichen Lösungen aus, wie folgt:

$$Y^a_o = Y^b_\beta - l\, Y^b_o \text{ und } Y^c_o = Y^b_\beta - m\, Y^b_o.$$

Als Bedingung für die Existenz eines Orthogonalkreises haben wir dann

$$l^2 = m^2 \text{ oder } l = + m. \tag{37}$$

d. h. wir haben den Parameter so zu bestimmen, daß eine Lösung existiert, deren Verlauf Figur 18 zeigt.

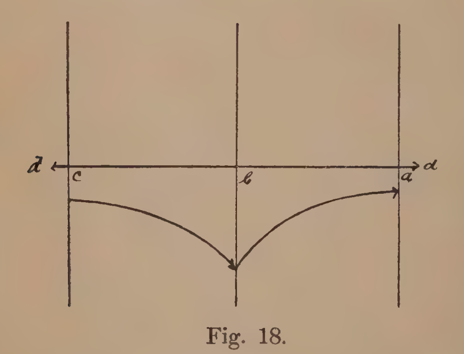


Fig. 18.

Dieser Fall ist tatsächlich der einfachste, da einerseits nur ein Lösungspaar in Betracht kommt, anderer-

seits es nicht notwendig ist, wie beim Hilbertschen Fall, den Verlauf von Y_0^c über b hinaus zu verfolgen. Die Ableitung geht daher ganz genau so, wie im allgemeinen Falle. Dasselbe gilt vom

IV. Fall:

Auch hier führt uns die Methode wie beim allgemeinen Falle zum Ziele. Wir haben nur zwischen c und b eine einzige und zwischen b und a zwei Lösungen zu betrachten.

Wieder schwieriger zu behandeln ist der

V. Fall:

Bei diesem haben wir eine Spitze im Punkte b, in den beiden übrigen Punkten gewöhnliche Ecken. Wir zeichnen den Punkt a aus und setzen:

$$(38) \qquad \eta = \frac{Y_\alpha^a}{Y_0^a},$$

dann können wir die Lösungen Y_0^b Y_γ^c und Y_0^c, wie folgt, ausdrücken:

$$Y_0^b = Y_\alpha^a - l Y_0^a; \; Y_\gamma^c = Y_\alpha^a - m_1 Y_0^a \text{ und } Y_0^c = Y_\alpha^a - m_2 Y_0^a.$$

Dabei sind Y_α^a und Y_0^a so normiert, daß

$$Y_0^a(a) = 1 \text{ und } \frac{d}{dt}\left(Y_\alpha^a(x)\right)_{x=a} = -1$$

ist. Als Bedingung für die Existenz eines Orthogonalkreises haben wir dann: $l^2 = m_1, m_2$. Wir geben der Geraden $z = Ax + B$ unserer Differentialgleichung, die jetzt die Form hat:

$$(39) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha}(x-b)\,|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)\,(x-c)}(Ax+B)y = 0$$

wieder die Anfangslage durch b und untersuchen den Verlauf der beiden in a und c endlichen Lösungen in den beiden Intervallen a b und b c.

Wir führen zu diesem Behufe wie im zweiten Falle vorübergehend zwei neue Lösungen $\overline{Y_o^c}$ und $\overline{Y_\gamma^c}$ ein, deren Normierung so getroffen sein soll, daß

$$(\overline{Y_o^c}(x))_{x=c} = +1 \text{ und } \frac{d}{dt}(\overline{Y_\gamma^c}(x))_{x=c+\varepsilon} = +1$$

wird und setzen dann $\overline{Y_o^c}(x) = u$ und $Y_o^a(x) = v$.

Ferner bestehen, wie früher, die Relationen:

$$\overline{Y_o^c}(x) = u(x) = \varrho_1 Y_\alpha^a(x) + \sigma_1 Y_o^a(x) \text{ und}$$

$$Y_o^a(x) = v(x) = \varrho_2 \overline{Y_\gamma^c}(x) + \sigma_2 \overline{Y_o^c}(x).$$

Substituieren wir diese Werte in die bekannte Identität

$$\left[u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt}\right]_c = -\left[u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt}\right]_a$$

so bekommen wir:

(40). $$\varrho_2 = -\varrho_1.$$

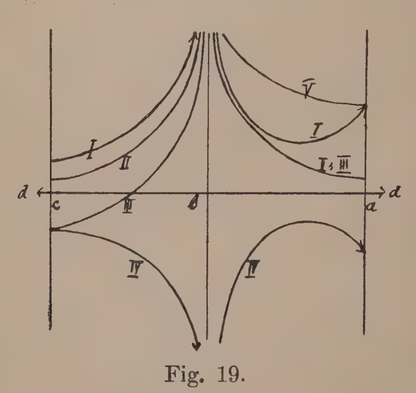


Fig. 19.

Die Lösung $\overline{Y_o^c}$ möge jetzt den in überstehender Figur gezeichneten Verlauf I haben. Es sei also an

der Stelle a die Ableitung von $\overline{Y_0^c}$ positiv, dann hat ϱ_1 einen negativen, ϱ_2 also einen positiven Wert und die Ableitung von Y_0^a an der Stelle c ist daher positiv. Die letztere hat somit in den beiden Intervallen a b und b c den links gezeichneten Verlauf II oder III. Wäre aber ϱ_1 positiv, so müßte ϱ_2 negativ sein und es würden im Intervalle c b analoge Verhältnisse herrschen, wie jetzt im Intervalle a b, so daß wir an der Voraussetzung, die uns auf die Kurve I führte, festhalten können, denn anderenfalls haben wir nur statt vom Intervalle b a vom Intervalle b c auszugehen. Da sich nun die Lösung Y_0^c von $\overline{Y_0^c}$ nur durch den jetzt negativen Proportionalitätsfaktor ϱ_1 unterscheidet, so erhalten wir für Y_0^c einfach das Spiegelbild der Lösung $\overline{Y_0^c}$ in der negativen Halbebene. In obiger Zeichnung ist es Kurve IV. Dabei ist m_2 positiv.

Bewegen wir jetzt die Gerade von der Anfangslage nach abwärts, so wird das Intervall b c immer stärker nichtoszillatorisch werden und m_2 wird beständig wachsen, was wir ebenso zeigen können, wie im Falle II. Schließlich wird bei genügend weiter Abwärtsbewegung der Geraden die Lösung $\overline{Y_0^c}$ dem Y_0^a proportional werden; d. h. m_2 ist unendlich groß geworden.

Von diesem Augenblicke an lassen wir jetzt den Parameter B wieder wachsen und untersuchen das Verhalten von m_1. Wir betrachten die Lösung Y_0^a, die bei Beginn der jetzigen Aufwärtsbewegung der Lösung $\overline{Y_0^c}$ proportional war. Das Intervall b a wird immer schwächer oszillatorisch; es behält somit Y_0^a in diesem Intervalle seine schematisch gezeichnete Lage im wesent-

lichen bei. Schließlich wird es bei genügender Aufwärtsbewegung der Lösung Y^c_γ proportional werden, da es ja, bevor es eine Nullstelle bekommt, in c verschwinden muß, d. h. aber m_1 wird unendlich groß werden. m_2 wird dabei beständig abnehmen und kann sogar einen negativen Wert bekommen. Es kann nämlich jetzt die Lösung $\overline{Y^c_o}$ im Innern des Intervalles bc eine Nullstelle erhalten haben.

Diese Lage der Geraden, bei der gerade $m_1 = \infty$ geworden ist, wählen wir jetzt als Ausgangspunkt und bewegen jetzt die Gerade definitiv nach abwärts; dann werden m_1 und m_2 den Kreis der reellen Zahlen entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers durchlaufen, derart, daß m_1 immer m_2 vorauseilen wird, ohne daß m_2 je m_1 einholen oder m_1 je m_2 überholen kann.

Wie verhält sich nun aber bei dieser Bewegung die Größe l? Bei der Anfangslage der Geraden durch b war das Intervall bc durchaus nichtoszillatorisch, also war l sicher positiv; $\overline{Y^c_o}$ hatte dabei den schematischen Verlauf I, den es beibehält, bis m_2 unendlich groß wird. Solange dieses nicht eingetreten ist, kann l nicht unendlich groß werden, denn dann wäre Y^a_o proportional Y^b_o, während ja Y^a_o in b einen unendlich großen positiven Wert haben muß. Um dies einzusehen, multiplizieren wir Y^a_o mit einem konstanten Faktor so, daß das so normierte $\overline{Y^a_o}$ in a denselben Wert hat wie $\overline{Y^c_o}$, dessen Ableitung in der Umgebung von a negativ ist. Dann liegt die Kurve $\overline{Y^a_o}$ in der Umgebung von a zunächst höher als $\overline{Y^c_o}$ und kann diese Kurve zwischen a und b nicht mehr schneiden, das sonst die Differenz $\overline{Y^a_o} - \overline{Y^c_o}$ zwei Nullstellen im

Innern des Intervalles b a hätte und jede andere Lösung dann mindestens auch eine Nullstelle haben müßte. (Verlauf V). Jetzt können dann zwei Fälle eintreten. Entweder geht m_2 durch ∞ und dann m_1 durch 0 oder aber es geht zuerst m_1 durch 0 und dann erst m_2 durch ∞.

Im ersten Falle ist das Produkt m_1 m_2 positiv und sein Wert liegt zunächst sehr nahe dem Unendlichen. Bewegen wir dann die Gerade immer weiter nach abwärts, so wird das Produkt immer mehr abnehmen. l wird bei der Bewegung immer wachsen. Es können also jetzt wiederum zwei Möglichkeiten eintreten. Es kann einmal zuerst m_1 durch 0 hindurchgehen oder aber es kann schon vorher l unendlich groß werden. In beiden Fällen aber gibt es dann sicher eine und nur eine Zwischenlage, bei der gerade $l^2 = m_1 \cdot m_2$ wird. Vergleiche dazu nachstehende Figur 20, bei der c_2 und c_1 sich bei Abwärts-

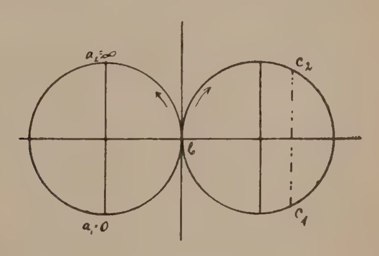


Fig. 20.

bewegung der Geraden auf dem Kreise im Uhrzeigersinn bewegen; dieser Sinn wird, wie es sein muß, in einem dem Uhrzeigersinn entgegengesetzten Sinn übergehen, wenn wir den Kreis $b c_1 c_2$ um die Tangente in b in den Kreis $a_1 b a_2$ drehen.

Im zweiten Falle geht zuerst m_1 durch 0 und dann erst m_2 durch ∞. Das Produkt m_1 m_2 durch-

läuft somit alle Werte von 0 bis ∞ und l ist dabei, wie bewiesen, beständig positiv. Es muß somit auch hier eine Zwischenlage geben, bei der gerade $l^2 = m_1 \cdot m_2$ wird. Damit ist die Existenz des Grundtheorems gegeben. Die Obertheoreme und die Eindeutigkeitsfragen erledigen sich genau wie im allgemeinen Falle. Die Sachlage im zweiten Falle zeigt Figur 21.

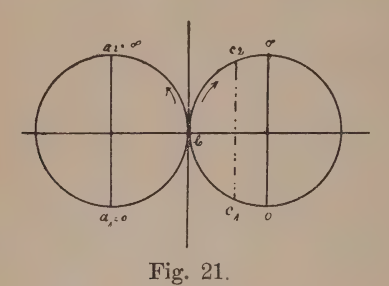


Fig. 21.

Zum Schlusse dieses Abschnittes sei noch bemerkt, daß in allen unseren Zeichnungen die Größen t_a, t_b und t_c alle endlich angenommen wurden, da ja bei dem schematischen Verlauf die Tatsache, daß $t = \infty$, bei unseren Schlußfolgerungen nicht wesentlich in Betracht kommt; ferner normierten wir die Integration für t in beiden Intervallen so, daß t mit x immer wächst.

Damit ist die Behandlung der Ausnahmefülle beendigt und wir wollen im folgenden allgemein die Fragestellung; wie sie bei einer Differentialgleichung mit fünf singulären Stellen auftritt, untersuchen. Wir haben im § 3 gezeigt, daß man ψ und damit die Parameter B und C unserer Differentialgleichung stets so bestimmen kann, daß die Seitenlänge $\varphi = c'd'$ einen vorgeschriebenen reellen Wert annimmt. Daraus folgt aber keineswegs, daß bei Vorgabe von reellen

Seitenlängen c′d′ und b′c′ auch die Parameter B und C eindeutig bestimmt sind. Dies wollen wir im nächsten Paragraphen untersuchen.

§ 5.

Eindeutige Bestimmung der Parameter B und C unserer Differentialgleichung durch Vorgabe reeller Seitenlängen.

Wir bedienen uns zum Nachweise dieser Tatsache derselben Methode, wie sie Herr **Hilb** im Falle von vier singulären Punkten angewendet hat[1]). Wir nehmen an, die Seitenlängen c′d′ und b′c′ seien reell und von der Form $\frac{m_1}{n_1}\pi$ bezüglich $\frac{m_2}{n_2}\pi$, wobei die m_1 und n_1 bezw. m_2 und $_2n$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben die n_1 und n_2 verschieden von 1 sein sollen.

Wir setzen dann

$$(41)\quad d\tau = |dt| = \frac{|dx|}{|x-a|^{1-\alpha}|x-b|^{1-\beta}|x-c|^{1-\gamma}|x-d|^{1-\delta}}$$

und erreichen dadurch, daß die auf der x und t-Achse übereinander liegenden Intervalle auf der τ-Achse nebeneinander zu liegen kommen.

Durchlaufen wir nun die beiden Intervalle, zu welchen die Seitenlängen $\frac{m_1}{n_1}\pi$ und $\frac{m_2}{n_2}$ gehören sollen n_1 bezügl. n_2 mal und legen das in der Annalenarbeit von Herrn Hilb[1]) eingeführte Fortsetzungsprinzip zu Grunde, so muß für jedes der beiden Intervalle eine Lösung existieren, die am Anfang und am Ende der nebeneinander liegenden Intervalle verschwindet, im Innern des Intervalles stetig ist, eine stetige erste Ableitung

1) Vergl. Hilb: math. Ann. 66, pag. 240—244.

besitzt und noch m_1—1 bezw. m_2—1 Nullstellen im Innern des Intervalles besitzt.

Wir kommen daher in unserem Falle auf ein gewöhnliches zweiparametriges Oszillationstheorem, das fordert, daß in zwei Intervallen je eine Lösung existiert, die am Anfang und am Ende des n_1 bezügl. n_2 fach durchlaufenen Intervalles verschwindet und im Innern m_1—1 bezügl. m_2—1 Nullstellen besitzt. Der Beweis geht genau so, wie der, den Herr Bôcher für das m parametrige Oszillationstheorem gegeben hat. Was nun die reellen Werte $\varphi = k\pi$ anlangt, so folgt bereits aus Satz I, daß zu $\varphi = k\pi$ zwei Parameterpaare B und C gehören, wenn nicht gleichzeitig $l_1 = 0$ und $l_2 = \infty$ oder umgekehrt $l_1 = \infty$ und $l_2 = 0$ sind. Desgleichen ersieht man sofort aus Satz I, daß es unmöglich ist, durch komplexe Seitenlängen die eindeutige Bestimmung der Parameter zu erweisen.

Wir haben daher den Satz gewonnen:

Satz X: „*Die akzessorischen Parameter B und C unserer Differentialgleichung können wir auf eine und nur eine Weise als reelle Gröſsen so bestimmen, daſs zwei Seiten vorgeschriebene reelle Längen besitzen, die aber nicht ganze Vielfache von π sind; denn ist das letztere der Fall, dann hört die eindeutige Bestimmung der Parameter auf*“.

Desgleichen wollen wir jetzt versuchen, die Parameter durch Vorgabe der Kantenlängen zu bestimmen.

§ 6.

Bestimmung der Parameter durch Vorgabe der Kantenlängen. — Beweis des Grundtheorems.

Wir gehen dabei von unserer ursprünglichen Gleichung (10) aus, wobei der Koeffizient A positiv

ist. Nach Relation (7) ist dann die Kantenlänge auf einer Achse wesentlich bestimmt durch einen Quotienten von der Form $\frac{l_1 l_2}{m_1 m_2}$. Wir wollen nun annehmen, daß die Kantenlänge auf der Achse b'b" den rein imaginären Wert $\overline{w}_2$, auf der Achse c'c" den rein imaginären Wert $\overline{w}_1$, besitzen soll. Diese Bedingung ist dann erfüllt, sobald für die jeweilige Lage der Parabel

$$z = Ax^2 + Bx + C \tag{41}$$

die beiden Gleichungen

$$l_1 l_2 = w_2 m_1 m_2 \text{ und } n_1 n_2 = w_1 p_1 p_2 \tag{42}$$

erfüllt sind. Dabei ist $w_2 = e^{\frac{2\overline{w}_2}{i}}$ und $w_1 = e^{\frac{2\overline{w}_1}{i}}$ zu setzen.

Die Werte l_1 und l_2 bezw. m_1 und m_2 sind die Größen, die η in den Eckpunkten d' und d" bezw. b' und b" des Kreisbogenfünfecks, auf welches die von der Achse des Reellen begrenzte Halbebene durch den Quotienten zweier Partikularlösungen unserer Differentialgleichung abgebildet wird, annimmt, wenn man η im Punkte c derart transformiert, daß es in c' und c" die ausgezeichneten Werte 0 und ∞ besitzt, d. h. wenn man so normiert, daß

$$Y^d_\gamma = Y^c_\gamma - l_1 Y^c_o \text{ und } Y^d_o = Y^c_\gamma - l_2 Y^c_o \tag{43}$$

und ebenso

$$Y^b_\beta = Y^c_\gamma - m_1 Y^c_o \text{ und } Y^b_o = Y^c_\gamma - m_2 Y^c_o$$

wird.

Desgleichen bedeuten n_1 und n_2 bezw. p_1 und p_2 Werte von η, die dieses in den Eckpunkten c' und c" bezw. a' und a" annimmt, wenn man für η in den

Punkten b′ und b″ die eben angegebenen Spezialwerte nimmt, d. h. wenn man

$$(44)\qquad Y^a_\alpha = Y^b_\beta - p_1 Y^b_o \text{ und } Y^a_o = Y^b_\beta - p_2 Y^b_o$$

und ebenso

$$Y^c_\gamma = Y^b_\beta - n_1 Y^b_o \text{ und } Y^c_o = Y^b_\beta - n_2 Y^b_o$$

setzt.

Um nun einen Zusammenhang zwischen den Parametern unserer Differentialgleichung und den Kantenlängen zu finden, gehen wir von der Anfangslage der Parabel $z = Ax^2 + Bx + C$ aus. Als solche bezeichnen wir die in nachstehender Figur gezeichnete Lage der Parabel durch b und c. Wir erreichen dadurch, daß der Faktor von y in allen drei Intervallen (ab), (bc) und (cd) durchaus negativ wird, daß also alle drei Intervalle durchaus nichtoszillatorisch sind.

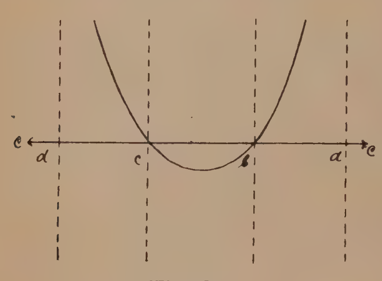


Fig. 22.

Denken wir uns jetzt den Quotienten η im Punkte b in der oben angegebenen Weise transformiert, so können bei unserer Anfangslage zwei verschiedene Fälle eintreten. Entweder es ist bei dieser Lage der Parabel der Quotient $\frac{n_1 n_2}{p_1 p_2} > w_1$ oder aber es ist gerade umgekehrt $\frac{n_1 n_2}{p_1 p_1} < w_1$.

Im ersten Falle verschieben wir die Parabel so, daß der Punkt x_2 fest liegen bleibt, x_1 dagegen auf der x-Achse von b nach a wandert. x_1 und x_2 sollen jedesmal die Schnittpunkte unserer Parabel mit der reellen Achse bedeuten. Dabei wird der Faktor von y in obiger Gleichung immer mehr und mehr positiv und das ganze Intervall ist schließlich durchaus oszillatorisch geworden, wenn x_1 bei seiner Verschiebung nach a gelangt ist.

Für die Anfangslage der Parabel hatten wir die Gleichung

$$Ax^2 + Bx + C = z;$$

für irgend eine der durch Verschiebung entstandenen Parabeln hat die Gleichung folgende Form:

$$Ax^2 + B_1x + C_1 = z.$$

Subtrahiert man beide Parabelgleichungen voneinander, so sieht man ohne weiteres, daß sich unsere beiden Parabeln nur in einem Punkte $\left(x = \frac{C_1 - C}{B - B_1}\right)$ schneiden können und das ist eben der Punkt x_2. Es müssen daher alle verschobenen Parabeln im Intervalle bc unterhalb unserer Anfangslage liegen. Das Intervall wird also immer schwächer oszillatorisch, da der Faktor von y beständig abnimmt, d. h. die Größen n_1 und n_2 nehmen ebenfalls beständig ab. Im Intervalle ba dagegen wächst der Faktor von y beständig; daher nehmen auch p_1 und p_2 durchaus zu.

Es sei nun y für irgend eine Stelle des Intervalles (b a) positiv, so wird nach unserer Gleichung (10) $\frac{d^2y}{dt^2}$ negativ. Betrachten wir dann speziell die Lösung Y_o^b, so ist für diese $\frac{d}{dt}(Y_o^b(x))_{x=b} = 0$ und $Y_o^b(b) = 1$;

es ist also $\frac{d}{dt} Y_o^b(x)$ gewiß solange negativ als $Y_o^b(x)$ positiv ist, da ja $\frac{d}{dt} Y_o^b(x)$ mit wachsendem x fortwährend abnimmt. Für $x = a$ ist also entweder

$$\lim_{\varepsilon = 0} \frac{d}{dt} (Y_o^b(x))_{x = a - \varepsilon} < 0$$

oder $Y_o^b(x)$ hat im Intervalle bereits eine Nullstelle gehabt. In beiden Fällen ist also $p_1 p_2$ schon unendlich, also sicher

$$n_1 n_2 < w_1 p_1 p_2$$

geworden, während ja bei der Anfangslage noch

$$n_1 n_2 > w_1 p_1 p_2$$

gewesen ist. Also muß eine Zwischenlage existieren, bei welcher

$$n_1 n_2 = w_1 p_1 p_2 \text{ ist.}$$

Im zweiten Falle, wenn bei der Anfangslage $n_1 n_2 < w_1 p_1 p_2$ ist, verfahren wir genau so. Nur verschieben wir jetzt das x_1 nach innen, dann wird das Intervall (bc) immer mehr und mehr oszillatorisch, da ja der Faktor von y immerfort zunimmt. In diesem Falle liegen dann alle verschobenen Parabeln oberhalb der Anfangslage. Dabei werden n_1 und n_2 beständig wachsen und p_1 und p_2 beständig abnehmen. Schließlich muß auch hier einmal n_2 unendlich groß geworden sein und damit die Ungleichung

$$n_1 n_2 > w_1 p_1 p_2$$

bestehen müssen. Da bei der Anfangslage nach unserer Annahme gerade die umgekehrte Ungleichung gilt, so muß es auch hier eine Zwischenlage geben, bei der

$$n_1 n_2 = w_1 p_1 p_2$$

geworden ist.

Fernerhin wollen wir nun versuchen, die Parabel stetig so zu verschieben, daß zwar die Bedingung

$$n_1 \, n_2 = w_1 \, p_1 \, p_2$$

immerfort erhalten bleibt, daß aber auch noch die zweite Bedingung

$$m_1 \, m_2 = w_2 \, l_1 \, l_2$$

erfüllt ist.

Wir gehen dabei von der eben gewonnenen Lage der Parabel aus, bei welcher $n_1 \, n_2 = w_1 \, p_1 \, p_2$ ist und bezeichnen diese Lage als erste Hauptlage I. Den Größen l_1, l_2; m_1, m_2; n_1, n_2 und p_1 p_2 fügen wir dabei einen oberen Index (1) zu, um äußerlich kenntlich zu machen, daß sich diese Größen auf die 1. Hauptlage beziehen sollen. Unsere Bedingsgleichung schreibt sich somit in der Form:

$$\overset{(1)}{n_1} \, \overset{(1)}{n_2} = w_1 \, \overset{(1)}{p_1} \, \overset{(1)}{p_2} \, .$$

Jetzt können wiederum zwei Möglichkeiten eintreten; entweder ist bei dieser Lage (1)

$$\overset{(1)}{m_1} \, \overset{(1)}{m_2} < w_2 \, \overset{(1)}{l_1} \, \overset{(1)}{l_2}$$

oder es ist gerade umgekehrt:

$$\overset{(1)}{m_1} \, \overset{(1)}{m_2} > w_2 \, \overset{(1)}{l_1} \, \overset{(1)}{l_2} \, .$$

Bevor wir jedoch die Diskussion dieser Fälle durchführen, wollen wir noch die Eigenschaften aller bei der Lage (1) auftretenden Größen l_1, l_2; m_1, m_2; n_1, n_2 und p_1, p_2 untersuchen. Wir werden dabei finden, daß alle diese Werte positive Größen sind und zwischen den Grenzen 0 und ∞ liegen. Für die beiden Größenpaare $\overset{(1)}{n_1}$ $\overset{(1)}{n_2}$ und $\overset{(1)}{p_1}$ $\overset{(1)}{p_2}$ folgt dies ohne weiteres aus unserer vorhergehenden Ableitung. Aus den Definitionsgleichungen für $\overset{(1)}{n_2}$ und $\overset{(1)}{m_2}$ folgt ferner, daß diese

beiden Größen nur gleichzeitig durch ∞ hindurchgehen können, da nur dann die beiden Lösungen Y_0^c und Y_0^b einander proportional werden können. Da schließlich das Intervall cd für die Lage I der Parabel durchaus nichtoszillatorisch ist, so bewegen sich auch die übrigen Größen $l_1^{(1)}$ und $l_2^{(1)}$ in den angegebenen Grenzen.

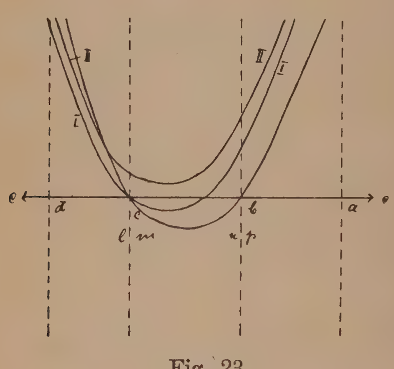


Fig. 23.

Jetzt wollen wir die beiden Möglichkeiten näher betrachten. Im ersten Falle, wenn $m_1^{(1)}\ m_2^{(1)} < w_2\ l_1^{(1)}\ l_2^{(1)}$ ist, verschieben wir zunächst die Parabel I parallel zu sich nach oben. (Lage II.) Dabei werden $n_1^{(1)}$ und $n_2^{(1)}$ beständig wachsen, $p_1^{(1)}$ und $p_2^{(1)}$ beständig abnehmen, da ja die verschobene Parabel vollständig oberhalb der Parabellage I liegt. Es bestehen also sicher folgende Ungleichungen:

$$n_1^{(2)}\ n_2^{(2)} > n_1^{(1)}\ n_2^{(1)} \text{ und } w_1\ p_1^{(2)}\ p_2^{(2)} < w_1\ p_1^{(1)}\ p_2^{(1)}$$

also ist $n_1^{(2)}\ n_2^{(2)} > w_1\ p_1^{(2)}\ p_2^{(2)}$. Auf der anderen Seite nimmt aus dem gleichen Grunde wie oben $m_1^{(1)}\ m_2^{(1)}$ be-

ständig zu und $\overset{(1)}{l_1}\ \overset{(1)}{l_2}$ dagegen immerzu ab. Während wir also einerseits immer mehr und mehr unserem Ziele zusteuern, entfernen wir uns auf der anderen Seite wieder von unserem erhaltenen Resultat. Dem ist aber leicht abzuhelfen. Wir ziehen durch die singulären Punkte b und c Lote zur reellen Achse und bezeichnen die Schnittpunkte der verschiedenen Parabellagen mit diesen Loten der Reihe nach mit B_1, B_2 bezw. Γ_1, Γ_2 u. s. w., wie aus der Figur unmittelbar ersichtlich ist. Wenn wir dann den einen Schnittpunkt B_2 festhalten und den Schnittpunkt Γ_2 auf dem Lote durch b nach abwärts bewegen, so nimmt dabei das Produkt $\overset{(2)}{n_1}\ \overset{(2)}{n_2}$ bis $\overset{(3)}{n_1}\ \overset{(3)}{n_2}$ immerfort ab und $\overset{(2)}{p_1}\ \overset{(2)}{p_2}$ wächst beständig auf $\overset{(3)}{p_1}\ \overset{(3)}{p_2}$. In der Tat liegt ja die so verschobene Parabel III in den Intervallen bc und ba ganz unterhalb der Parabellage II. Es ist also sicher:

$$\overset{(3)}{n_1}\ \overset{(3)}{n_2} < \overset{(2)}{n_1}\ \overset{(2)}{n_2} \text{ und } \overset{(3)}{p_1}\ \overset{(3)}{p_2} > \overset{(2)}{p_1}\ \overset{(2)}{p_2}.$$

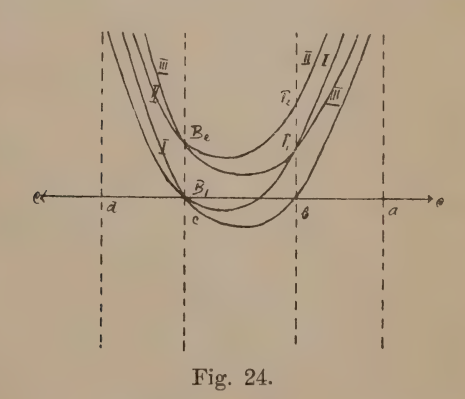


Fig. 24.

Wir haben somit bisher folgende Resultate:

Für Lage I ist:

$$\overset{(1)}{n_1}\ \overset{(1)}{n_2} = w_1\ \overset{(1)}{p_1}\ \overset{(1)}{p_2}.$$

Für Lage II ist:

$$\overset{(2)}{n}_1 \overset{(2)}{n}_2 > \overset{(1)}{n}_1 \overset{(1)}{n}_2 \text{ und } w_1 \overset{(2)}{p}_1 \overset{(2)}{p}_2 < w_1 \overset{(1)}{p}_1 \overset{(1)}{p}_2$$

Für Lage III ist:

$$\overset{(3)}{n}_1 \overset{(3)}{n}_2 < \overset{(2)}{n}_1 \overset{(2)}{n}_2 \text{ und } w_1 \overset{(3)}{p}_1 \overset{(3)}{p}_2 > w_1 \overset{(2)}{p}_1 \overset{(2)}{p}_2$$

also sicher:

$$w_1 \overset{(3)}{p}_1 \overset{(3)}{p}_2 > w_1 \overset{(1)}{p}_1 \overset{(1)}{p}_2 > \overset{(1)}{n}_1 \overset{(1)}{n}_2.$$

Wenn wir also Γ_2 bei festgehaltenem B_2 bis Γ_1 wandern lassen, so sind zwei Fälle möglich. Entweder es ist

$$\overset{(3)}{n}_1 \overset{(3)}{n}_2 < w_1 \overset{(3)}{p}_1 \overset{(3)}{p}_2,$$

Dann ist bei der Abwärtsbewegung von Γ_2 bereits eine Stelle überschritten worden, bei der unsere ursprüngliche Bedingung $\overset{(1)}{n}_1 \overset{(1)}{n}_2 = w_1 \overset{(1)}{p}_1 \overset{(1)}{p}_2$ wiederum erfüllt ist, oder aber es ist immer noch

$$\overset{(3)}{n}_1 \overset{(3)}{n}_2 > w_1 \overset{(3)}{p}_1 \overset{(3)}{p}_2;$$

dann folgt

$$\overset{(3)}{n}_1 \overset{(3)}{n}_2 - w_1 \overset{(3)}{p}_1 \overset{(3)}{p}_2 < \overset{(2)}{n}_1 \overset{(2)}{n}_2 - w_1 \overset{(3)}{p}_1 \overset{(3)}{p}_2 <$$
$$< \overset{(2)}{n}_1 \overset{(2)}{n}_2 - w_1 \overset{(1)}{p}_1 \overset{(1)}{p}_2 < \overset{(2)}{n}_1 \overset{(2)}{n}_2 - \overset{(1)}{n}_1 \overset{(1)}{n}_2 \backsim \lambda$$

d. h. bis auf Glieder höherer Ordnung proportional zu λ, wobei λ die Parabelverschiebung parallel nach aufwärts bedeuten soll. Das heißt also: Wenn wir die Verschiebung λ klein genug wählen, so wird nach der Verschiebung der Parabel die Differenz

$$\overset{(3)}{n}_1 \overset{(3)}{n}_2 - w_1 \overset{(3)}{p}_1 \overset{(3)}{p}_2$$

noch unter diese Grenze herabsinken. Damit ist aber der Beweis geliefert, daß die Bedingung

$$n_1 n_2 = w_1 p_2 p_2$$

immer in beliebig naher Nachbarschaft des Punktes Γ_1 der Parabellage I erfüllt ist, wenn wir nur von vorneherein den Punkt B_2 beliebig wenig verschieben.

Auf diese Weise erhalten wir also eine neue Lage IV der Parabel, bei der die Bedingung:

$$n_1 \ n_2 = w_1 \ p_1 \ p_2$$

erfüllt ist. Von dieser Parabel können wir auch noch aussagen, daß sie die Parabel I entweder im Intervalle bc oder im Intervalle ba schneiden muß; denn wäre das nicht der Fall, so müßten gleichzeitig beide Ungleichungen bestehen:

$$\overset{(4)}{n_1} \ \overset{(4)}{n_2} > \overset{(1)}{n_1} \ \overset{(1)}{n_2} \text{ und } \overset{(4)}{p_1} \ \overset{(4)}{p_2} < \overset{(1)}{p_1} \ \overset{(1)}{p_2}.$$

Es könnte daher nie eine Lage gefunden werden, bei welcher $n_1 \ n_2 = w_1 \ p_1 \ p_2$ ist, was aber nach dem Vorhergehenden immer möglich ist.

Wie nun auch die Parabel IV liegen mag, sei es daß sie Parabel I im Intervalle bc oder im Intervalle ba schneidet, ihre Lage ist doch immer derart, daß die Größen $\overset{(1)}{l_1}$ und $\overset{(1)}{l_2}$ beständig abnehmen, da sich ja die Parabel IV im Intervalle cd ganz oberhalb der ersten Hauptlage befindet.

Es könnte nun sein, daß bereits nach dieser ersten Verschiebung $\overset{(4)}{m_1} \ \overset{(4)}{m_2} > w_2 \ \overset{(4)}{l_1} \ \overset{(4)}{l_2}$ geworden wäre, so gäbe es eine Zwischenlage, bei der

$$m_1 \ m_2 = w_2 \ l_1 \ l_2$$

sein müßte. Besteht nun aber auch nach der Verschiebung noch die ursprüngliche Ungleichung, dann setzen wir den Prozeß einfach fort und verschieben den Punkt B_2 wiederum um ein kleines Stück nach oben, bewegen die Parabelachse parallel zu sich nach

rechts und wiederholen alle Schritte, die wir im ersten Falle ausgeführt haben. Dabei kann kein Punkt vorkommen in dessen Umgebung wir den Prozeß nicht fortsetzen könnten, solange B_2 nicht in das Unendliche rückt. Der Punkt B_2 kann aber nicht beliebig weit nach oben rücken, ohne daß vorher einmal unsere Bedingungsgleichung.

$$m_1 \; m_2 = w_2 \; l_1 \; l_2$$

erfüllt ist. Denn soll für den Schnittpunkt unserer Parabel mit der Geraden $x = c$ der zugehörige Wert z beliebig groß werden, so muß in dem Ausdruck

$$z = Ax^2 + Bx + C$$

mindestens eine der Größen B und C beliebig groß werden. In diesem Falle setzen wir dann

$$Ax^2 + Bx + C = Ax^2 + \varrho \, (cx + d), \tag{45}$$

dann ist für den oszillationstheoretischen Charakter unserer Intervalle das zweite Polynom von ausschlaggebendem Einfluß. Welchen Verlauf hat nun die Gerade $cx + d$ in den 3 Intervallen ba, bc und cd?

Im ersten Intervalle ba, das negative Signatur hat, darf die Gerade nicht völlig unterhalb der Geraden $z = 0$ verlaufen, da ja das Intervall nichtoszillatorisch sein soll. Im Intervalle bc, das positive Signatur hat, darf die Gerade aus dem gleichen Grunde nicht ganz oberhalb der Geraden $z = 0$ verlaufen. Es muß somit die Gerade $cx + d$ entweder im Intervalle ba oder im Intervalle bc schneiden, jedenfalls muß sie im Intervalle cd vollständig unterhalb der Geraden $z = 0$ verlaufen. Das Intervall cd wäre also oszillatorisch. Das ist aber unmöglich, denn l_1 und l_2 nehmen bei der Aufwärtsbewegung der Parabel beständig ab. Es können

somit m_1 m_2 und damit auch n_1 n_2 und p_1 p_2 nicht unendlich groß werden, solange sie kleiner als l_1 l_2 sind, ohne daß vorher eine Lage existiert, bei der

$$m_1 \, m_2 = w_2 \, l_1 \, l_2$$

ist.

Tritt schließlich bei der Lage I der Parabel der zweite Fall ein, daß

$$m_1 \, m_2 > w_2 \, l_1 \, l_2$$

ist, so kann man die Betrachtung ganz analog durchführen. In diesem Falle muß man nur die parallel verschobene Parabel so bewegen, daß sich die Parabelachse parallel zur ursprünglichen Lage nach links verschiebt.

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz XI: „*Wenn A positiv ist, dann können wir die Parameter B und C auf eine und nur eine Weise so bestimmen, dafs jede der Kantenlängen auf den beiden Achsen b'b" und c'c" einen imaginären Wert besitzt derart, dafs der Faktor von* $\frac{i}{2}$ *einen zwischen 0 und* ∞ *gelegenen reellen Wert annimmt und dafs die drei Seiten a'b', b'c' und c'd' rein imaginäre Seitenlängen haben.*

Als Spezialfall dieses Satzes erhalten wir das sogenannte Grundtheorem. Dasselbe lautet:

Satz XII: „*Wenn* A_e *positiv ist, kann man die Parameter B und C auf eine und nur eine Weise so bestimmen, dafs das Fünfeck einen Orthogonalkreis besitzt, den die Seiten a'b', b'c' und c'd' nicht schneiden.*"

Was ist nun die Bedingung dafür, daß das Kreisbogenfünfeck einen Orthogonalkreis besitzt? Zu diesem Zwecke müssen sich die Achsen a'a"; b'b" und c'c"

und ebenso die Achsen b' b", c' c" und d' d" in einem Punkte schneiden, denn die letzte Kante e' e" geht dann von selbst durch diesen gemeinsamen Schnittpunkt der Achsen, da sie ja mit d' d" und a' a" je in einer Ebene liegt. Das Vorhandensein eines solchen gemeinsamen Schnittpunktes heißt aber nichts anderes, als daß sämtliche Kantenlängen gleich Null werden. Diese Bedingung ist erfüllt, sobald gleichzeitig die beiden Gleichungen bestehen:

(46) $l_1 l_2 = m_1 m_2$ und $n_1 n_2 = p_1 p_2$.

Der Beweis des Grundtheorems ist also ganz analog den vorherigen Betrachtungen zu führen, nur daß an Stelle der beiden Faktoren w_1 und w_2 hier beidemal der Faktor 1 tritt.

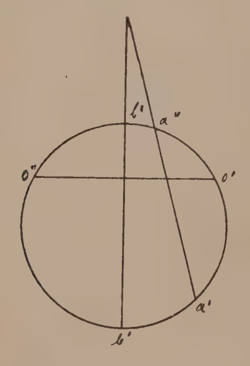


Fig. 25.

Da ferner die Größen $l_1 l_2$ und $m_1 m_2$ und ebenso $n_1 n_2$ und $p_1 p_2$ positive Werte besitzen, so folgt, daß sich die Achsen a'a", b'b" und c' c" außerhalb der Kugel schneiden. Der Orthogonalkreis ist also reell und aus überstehender Figur ist ersichtlich, daß die Seiten a' b', b' c' und c' d' den Orthogonalkreis nicht schneiden. Diese Tatsache ist aber nach Satz (11) identisch

mit der Forderung, daß die genannten Seiten rein imaginäre Längen besitzen. Über das Verhalten der beiden anderen Seiten de und ea in Bezug auf den Orthogonalkreis werden wir im nächsten Paragraphen Aufschluß bekommen.

§ 7.

Diskussion der sich in das Unendliche erstreckenden Intervalle, wenn alle A positive Größen sind.

Wir wollen in diesem Paragraphen zeigen, daß auch die beiden übrigen Seiten des Fünfecks de und ea den Orthogonalkreis nicht schneiden können, also rein imaginäre Seitenlänge besitzen, wenn wir an der Annahme festhalten, daß alle A positiv sein sollen.

Wir gehen beim Beweise vom Gegenteil aus und nehmen an, die beiden sich ins Unendliche erstreckenden Intervalle seien oszillatorisch. Es müssen also die Seiten de und ea einen von Null verschiedenen reellen Teil besitzen. Daß wir diese Annahme gleichzeitig für beide Intervalle machen müssen, ist selbstverständlich, denn es ist unmöglich, daß nur eine Seite des Kreisbogenfünfecks den Orthogonalkreis schneidet.

Um nun aber über die sich ins Unendliche erstreckenden Intervalle Untersuchungen anstellen zu können, müssen wir den Punkt $e = \infty$ ins Endliche hereintransformieren, so daß an Stelle unserer bisherigen Punkte a, b, c, d und e die Punkte d, e, a, b und c zu liegen kommen. Für diese neue Anordnung der Intervalle können wir nun analog unseren vorherigen Betrachtungen wiederum eine Lage der Parabel angeben, für die gleichzeitig zwei Gleichungen

bestehen, die die Existenz eines reellen Orthogonalkreises bedingen, der von den Seiten d′e′, e′a′, a′b′ nicht geschnitten wird.

Wir transformieren dann diese ebenerhaltene Parabel wieder zurück in unser ursprüngliches Blatt, so erhalten wir daselbst eine zweite Parabel und unsere Aufgabe besteht jetzt darin, die gegenseitig mögliche Lage dieser beiden Parabeln näher zu diskutieren.

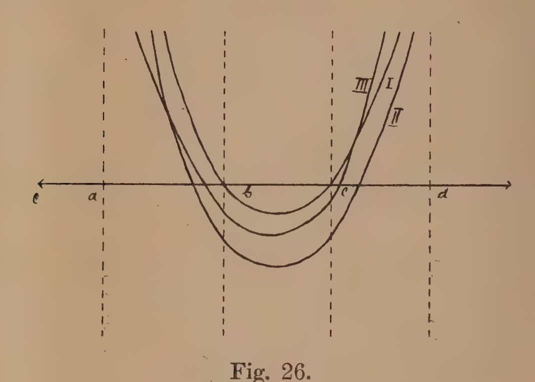


Fig. 26.

Welche Lagen kann nun diese zurücktransformierte Parabel gegenüber der ersten Lage haben? Sie kann sicherlich weder im Intervalle ae noch im Intervalle de ganz oberhalb unserer ursprünglichen Parabel liegen, denn sonst wären ja diese beiden Intervalle bereits schwächer oszillatorisch als im ersten Falle. Das würde aber unserer Annahme widersprechen, daß die Seiten ae und de den Orthogonalkreis scheiden sollen. Es sind also von vornherein nur zwei Lagen unserer zurücktransformierten Parabel möglich. Entweder liegt sie vollständig unterhalb der Lage I oder aber sie schneidet dieselbe in einem der äußeren Intervalle ae oder de.

Betrachten wir zuerst die erste Möglichkeit, so wäre in diesem Falle das Intervall bc schwächer oszillatorisch, das Intervall ab dagegen zwar stärker oszillatorisch geworden, aber immer noch nicht oszillatorisch geblieben. Es würden also folgende Ungleichungen bestehen müssen:

$$\text{(47)} \qquad \overset{(1)}{l_1} < \overset{(2)}{l_1} \text{ und } \overset{(1)}{l_2} < \overset{(1)}{l_2} \text{ und ebenso}$$

$$\overset{(1)}{m_1} > \overset{(2)}{m_1} \text{ und } \overset{(1)}{m_2} > \overset{(2)}{m_2} \; .$$

Es ist somit unmöglich, daß bei dieser Lage der Parabeln die beiden Gleichungen:

$$\text{(48)} \qquad \overset{(1)}{l_1}\,\overset{(1)}{l_2} = \overset{(1)}{m_1}\,\overset{(1)}{m_2} \text{ und } \overset{(2)}{l_1}\,\overset{(2)}{l_2} = \overset{(2)}{m_1}\,\overset{(2)}{m_2}$$

gleichzeitig bestehen können, wie es nach unserer Annahme der Fall sein müßte.

Zu genau demselben Resultate gelangen wir, wenn wir die zweite Möglichkeit zulassen, daß sich die Parabeln etwa im Intervalle de schneiden mögen. Auch hier gelten genau dieselben Ungleichungen (47), wie sie für den vorigen Fall angegeben wurden. Es ist somit auch in diesem Falle ein gleichzeitiges Bestehen der beiden Bedingungsgleichungen (48) ausgeschlossen.

Wir haben somit den Satz gewonnen:

Satz XIII: „*Wenn alle A positiv sind und drei der Intervalle ab, bc, cd sind nichtoszillatorisch, so müssen es auch die beiden übrigen Intervalle sein. Es müssen dann alle fünf Seiten rein imaginäre Längen besitzen.*“

§ 8.

Eindeutige Bestimmung des Parameters im Falle des Grundtheorems.

Wir nehmen an, es gäbe noch eine zweite Lage der Parabel, bei welcher ebenfalls gleichzeitig die beiden Bedingungsgleichungen $l_1 l_2 = m_1 m_2$ und $n_1 n_2 = p_1 p_2$ erfüllt sind.

Diese zweite Parabel könnte dann gegenüber der ersten Parabel nur folgende Lagen besitzen:

1. Parabel II liegt vollständig oberhalb Parabel I.
2. Parabel II liegt vollständig unterhalb Parabel I.
3. Beide Parabeln schneiden sich in einem der äußeren Intervalle ac oder de.
4. Beide Parabeln schneiden sich in einem der beiden Intervalle ab oder cd und schließlich
5. die beiden Parabeln schneiden sich im Intervalle bc.

Es fragt sich nun, ob überhaupt eine dieser fünf Lagen bei den gegebenen Bedingungen möglich ist. Es müssen nämlich für beide Lagen der Parabeln gleichzeitig nachfolgende Relationen bestehen:

Für die erste Parabel:

$$\overset{(1)}{l_1}\,\overset{(1)}{l_2} = \overset{(1)}{m_1}\,\overset{(1)}{m_2} \text{ und } \overset{(1)}{n_1}\,\overset{(1)}{n_2} = \overset{(1)}{p_1}\,\overset{(1)}{p_2}$$

(49) für die zweite Parabel:

$$\overset{(2)}{l_1}\,\overset{(2)}{l_2} = \overset{(2)}{m_1}\,\overset{(2)}{m_2} \text{ und } \overset{(2)}{n_1}\,\overset{(2)}{n_2} = \overset{(2)}{p_1}\,\overset{(2)}{p_2}\,.$$

Im ersten Falle gelten die Ungleichungen:

$$\overset{(1)}{l_1} > \overset{(2)}{l_1}\,,\ \overset{(1)}{l_2} > \overset{(2)}{l_2}\,;\ \overset{(1)}{m_1} < \overset{(2)}{m_1}\,,\ \overset{(1)}{m_2} < \overset{(2)}{m_2}\,;\ \overset{(1)}{n_1} < \overset{(2)}{n_1}\,,$$

$$\overset{(1)}{n_2} < \overset{(2)}{n_2}\,;\ \overset{(1)}{p_1} > \overset{(2)}{p_1} \text{ und } \overset{(1)}{p_2} > \overset{(2)}{p_2}\,.$$

Damit ist die Unmöglichkeit des 1. Falles gegeben.

Die Diskussion des zweiten und dritten Falles können wir uns ersparen, da bereits im vorigen Paragraphen die Unmöglichkeit dieser Lagen nachgewiesen wurde.

Wie steht es aber im Falle IV? Wir nehmen an, daß sich beide Parabeln im Intervalle cd schneiden sollen. Dann ist für die Lage II der Parabel das Intervall bc schwächer oszillatorisch, das Intervall ba stärker oszillatorisch geworden. Es bestehen daher die Ungleichungen:

$$\overset{(2)}{l_1} > \overset{(1)}{l_1}, \quad \overset{(2)}{l_2} > \overset{(1)}{l_2} \quad \text{und entsprechend}$$

$$\overset{(2)}{m_1} < \overset{(1)}{m_1}, \quad \overset{(2)}{m_2} < \overset{(1)}{m_2}.$$

Damit ist also wiederum das gleichzeitige Bestehen der beiden Bedingungsgleichungen unmöglich. Ganz genau so ist es natürlich, wenn sich die beiden Parabeln im Intervalle ab schneiden würden.

Es bleibt demnach nur noch der letzte Fall übrig, daß der Schnitt beider Parabeln in das Intervall bc fällt.

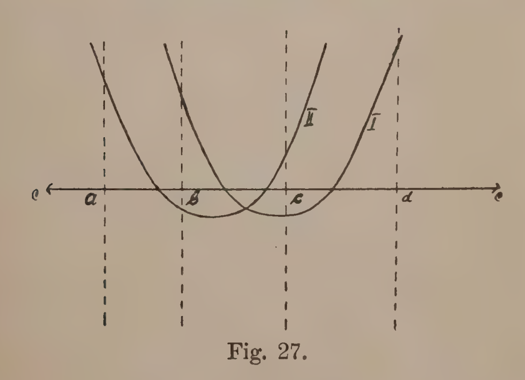


Fig. 27.

In diesem Falle zeichnen wir den unendlichen fernen Punkt aus und setzen:

$$(50)\quad \begin{aligned} Y^e_{\varepsilon'} &= Y^d_\delta - r_1\, Y^d_o \\ Y^e_{\varepsilon''} &= Y^d_\delta - r_2\, Y^d_o \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} Y^e_{\varepsilon'} &= Y^a_\alpha - s_1\, Y^a_o \\ Y^e_{\varepsilon''} &= Y^a_\alpha - s_2\, Y^a_o \end{aligned}$$

Für die 2. Lage der Parabel ist dann das äußere Intervall de schwächer oszillatorisch als für die erste Lage, es gelten somit die Ungleichungen:

$$\overset{(1)}{r_1} > \overset{(2)}{r_1} \text{ und } \overset{(1)}{r_2} > \overset{(2)}{r_2}$$

das Intervall ae dagegen ist für die erste Lage schwächer oszillatorisch als für die zweite; wir haben daher in diesem Falle:

$$\overset{(1)}{s_1} < \overset{(2)}{s_1} \text{ und } \overset{(1)}{s_2} < \overset{(2)}{s_2}.$$

Es kann also in diesem Falle niemals

$$\overset{(1)}{r_1}\,\overset{(1)}{r_2} = \overset{(1)}{s_1}\,\overset{(1)}{s_2} \text{ und gleichzeitig } \overset{(2)}{r_1}\,\overset{(2)}{r_2} = \overset{(2)}{s_1}\,\overset{(2)}{s_2}$$

werden. Damitist auch die Unmöglichkeit des letzten Falles nachgewiesen.

Es können somit bei keiner Lage der Parabeln gleichzeitig die beiden Bedingungsgleichungen (49) bestehen; es müßten denn beide Parabeln identisch sein. Damit ist aber der Eindeutigkeitsbeweis für das Grundtheorem gegeben.

§ 9.

Besondere Betrachtungen des Falles, bei welchem A_e positiv und alle übrigen A negativ sind.

Es sei $A_a < 0$; $A_b < 0$; $A_c < 0$; $A_d < 0$ aber $A_e > 0$.

Aus den Betrachtungen des Grundtheorems folgt, daß man die Parameter B_e und C_e stets so bestimmen kann, daß das Kreisbogenfünfeck einen reellen Orthogonalkreis besitzt, den die Seiten a'b', b'c' und c'd'

nicht schneiden. Die Seitenlängen sind also rein imaginär d. h. die drei Intervalle ab, bc und cd sind nichtoszillatorisch. Wie steht es aber jetzt mit den beiden übrigen Intervallen? Um diese untersuchen zu können, transformieren wir zunächst den Punkt a ins Unendliche und betrachten die Intervalle bc, cd und de. Von den beiden Erstgenannten wissen wir bereits, daß sie nichtoszillatorisch sind, da ja die Seitenlängen rein imaginäre Werte haben. Unsere Parabel kann also im Intervalle bc nicht vollständig unterhalb, im Intervalle cd nicht vollständig oberhalb der x-Achse verlaufen, da ja sonst die beiden Intervalle oszillatorisch wären. Es kann somit die Parabel nur eine von den in Figur 28 schematisch gezeichneten Lagen haben. Daraus

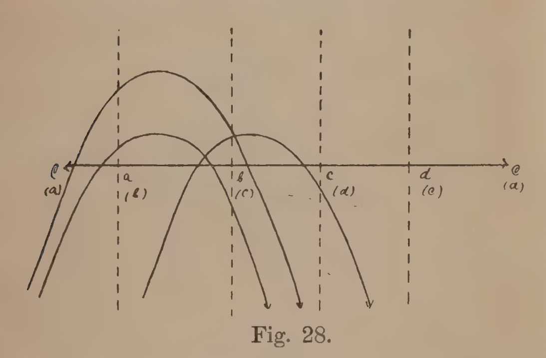


Fig. 28.

folgt aber sofort, daß das Intervall de oszillatorisch ist, da ja die Parabel in diesem Intervalle ganz unterhalb der x Achse verläuft. Ganz ebenso findet man, daß auch das Intervall ea oszillatorisch sein muß, wenn man statt des Punktes a den Punkt d ins Unendliche transformiert. Die Intervalle ab und bc sind nach obigem wieder nichtoszillatorisch. Somit kann die Parabel im Intervalle ab nicht vollständig oberhalb, im Intervalle bc nicht vollständig unterhalb verlaufen.

Jedenfalls ist aber ohne weiteres klar, daß sie im Intervalle ae ganz unterhalb der x-Achse verläuft. Das Intervall ae ist somit oszillatorisch.

Diesen letzten Beweis hätten wir uns auch ersparen können, nachdem wir bereits für ein Intervall nachgewiesen hatten, daß es oszillatorisch sein muß. In solchem Falle muß stets auch das andere in Betracht kommende Intervall oszillatorisch sein, da ja eine Seite allein den Orthogonalkreis nicht schneiden kann.

Nachfolgende Figur zeigt uns, wie ein Kreisbogenfünfeck dieser Art aussieht. Es ist der bequemeren Zeichnungsweise halber wiederum die komplexe η-Ebene gewählt.

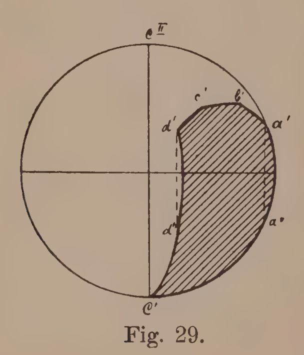


Fig. 29.

§ 10.

Beweis der Existenz der Obertheoreme.

Wir gehen dabei aus von der Anfangslage der Parabel durch b und c, bei der alle vorkommenden Größen p_1, p_2; n_1, n_2; m_1, m_2 und l_1, l_2 positive Werte besitzen. Wie beim Grundtheorem wollen wir wiederum die Schnittpunkte der Parabel mit der reellen Achse mit x_1 und x_2 bezeichnen. Bei der Anfangslage ist $x_1 = b$ und $x_2 = c$.

Wir halten dann zunächst den Punkt x_2 fest und bewegen den Punkt x_1 nach links. Dabei werden n_1 und n_2 beständig abnehmen und p_1 und p_2 immerfort zunehmen, denn die verschobene Parabel liegt in den Intervallen bc und ba vollständig unterhalb der Anfangslage. Schließlich werden wir erreichen können, wenn wir den Punkt x_1 genügend weit nach links verschieben, daß p_1 und p_2 den Kreis der reellen Zahlen entgegengetzt dem Uhrzeigersinn beliebig oft durchlaufen, n_1 und n_2 nach wie vor positiv bleiben. Haben dann die Größen p_1 und p_2 die gewünschte Zahl von Umläufen um den Kreis der reellen Zahlen ausgeführt, so ist es immer möglich eine Lage aufzufinden, bei der die Bedingsgleichung

$$p_1 \, p_2 = n_1 \, n_2$$

erfüllt ist. Die Sachlage ist also hier genau so wie beim Viereck[1]).

Nach Voraussetzung ist nun $n_1 \, n_2$ immer größer Null; also muß auch das Produkt $p_1 \, p_2$ stets positiv sein. Dies gibt uns Veranlassung zwei Fälle zu unterscheiden; es können nämlich die einzelnen Faktoren p_1 und p_2 entweder beide positiv oder beide negativ sein. Im ersten Falle wird $p_1 \, p_2$ gerade einmal gleich $n_1 \, n_2$ werden können, da ja $p_1 \, p_2$ beständig wächst und $n_1 \cdot n_2$ beständig abnimmt. Im zweiten Falle dagegen nimmt zwar $n_1 \, n_2$ auch immerzu ab und die einzelnen Faktoren p_1 und p_2 fortwährend zu, aber das Produkt $p_1 \, p_2$ nimmt beständig ab. Der Bruch $\frac{n_1 \, n_2}{p_1 \, p_2}$ braucht also in diesem Falle nicht monoton abzunehmen, da ja Zähler und Nenner gleichzeitig abnehmen. Im zweiten

1) Vergleiche Hilb, math. Ann. 08 pg. 248.

Falle wird es also mehrere Lagen geben, bei denen unsere Bedingungsgleichung

$$p_1 \, p_2 = n_1 \, n_2$$

erfüllt ist. Die Zahl der möglichen Lagen ist jedoch stets eine ungerade, denn der Wert des Bruches geht von ∞ nach 0. Wir bekommen also, wenn wir die Parabel solange verschieben bis wir im gewünschten Oszillationsbereiche sind, von der Gleichung

$$p_1 \, p_2 - n_1 \, n_2 = 0$$

eine oder sicherlich eine ungerade Zahl von Wurzeln.

Jetzt verschieben wir den Punkt x_2 nach rechts; dann werden zunächst l_1 und l_2 abnehmen, aber nach wie vor positiv bleiben, m_1 und m_2 dagegen beständig zunehmen. Bei einer steten Verschiebung des Punktes x_2 werden sich dann aber auch die Werte x_1, für welche die Gleichung $p_1 \, p_2 = n_1 \, n_2$ bereits erfüllt ist, und für welche die Seite ab die gewünschte Zahl von Selbstüberschlagungen hat, stetig ändern, wobei es dann allerdings vorkommen kann, daß zwei Werte von x_1 zusammenfallen und dann komplex werden, oder daß aus dem Zusammenfallen zweier komplexer Wurzeln neue Wurzeln, deren Zahl jedoch immer endlich bleiben muß, entstehen. In jedem Falle kann die Gleichung nur Wurzeln in gerader Anzahl verlieren oder gewinnen, denn die anderen Wurzeln der Gleichung, zu denen andere Oszilationszahlen gehören, für die die Bedingungsgleichung erfüllt ist, können nicht mit diesen zusammenfallen, wie unmittelbar aus der geometrischen Bedeutung folgt.

Die Zahl der Wurzeln ist also immer ungerade und unterhalb einer bestimmten Grenze, wenn wir für

die Größe x_2 eine obere Grenze vorschreiben und x_2 in dem angegebenen Sinne verschoben denken.

Die Sachlage ist also jetzt folgende: Wenn wir x_2 nach rechts verschieben, so behält jederzeit die Gleichung $p_1 p_2 - n_1 n_2 = 0$ eine ungerade Zahl von Wurzeln. Die Größen l_1 und l_2 bleiben bei der Bewegung immer positiv, m_1 und m_2 werden dagegen im allgemeinen mit wachsendem x_2 den Kreis der reellen Zahlen entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne durchlaufen, wobei jedoch für die einzelnen Werte der Wurzeln x_1 auch teilweise rückläufige Bewegung eintreten kann. Denn wir denken uns dabei x_1 immer so verschoben, daß die Produktgleichung erhalten bleibt und dabei kann es vorkommen, daß die Punkte um die Null- und Unendlichkeitsstelle hin und her pendeln. Man kann

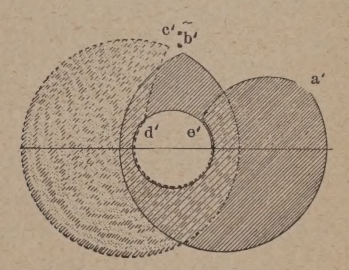


Fig. 30.

natürlich stets erreichen, wenn man x_2 groß genug wählt, daß für jede der reellen Wurzeln x_1, die in Betracht kommen, das Intervall cd in vorgeschriebener Weise oszillatorisch wird, und zwar derart, daß für jedes reelle x_1, für welches die Gleichung

$$p_1 p_2 - n_1 n_2 = 0$$

erfüllt ist, der Quotient $\frac{l_1 \, l_2}{m_1 \, m_2}$ entweder die Werte von 0 bis ∞ bezüglich ∞ bis 0 durchläuft, wobei

wir sicher sind, daß stets ein reelles x_1 existiert und daß dieses reelle x_1 sich stetig ändert. Daher muß es mindestens eine Lage von x_2 geben, für die gleichzeitig die beiden Bedingungsgleichungen:

$$p_1 \, p_2 = n_1 \, n_2 \text{ und } l_1 \, l_2 = m_1 \, m_2$$

erfüllt sind. Damit ist aber die Existenz der Obertheoreme bewiesen.

Figur 30 gibt uns ein Bild eines Kreisbogenfünfeckes vom genannten Typus.

Lebenslauf.

Ich bin am 24. Dezember 1883 in Nürnberg als Sohn des verstorbenen Kaufmanns, Albrecht Gerstenmeier, geboren. Vom September 1890 ab besuchte ich die Volksschule und trat im September 1895 in die Realschule meiner Vaterstadt ein, die ich im Juli 1901 absolvierte. Darnach besuchte ich das Realgymnasium in Nürnberg, woselbst ich mir im Jahre 1905 die Reife für die Universität erwarb. Vom Wintersemester 1905/6 ab studierte ich Mathematik und verwandte Gebiete und zwar 7 Semester an der Universität Erlangen und 1 Semester an der Universität München. Ich hörte die Vorlesungen und Übungen der Herren Professoren und Dozenten: Gordan, Noether, Wiedemann, Reiger, Hilb, Fischer, Steinmeyer, Hensel, und Leser in Erlangen; Lindemann, Pringsheim, Voß, Döhlmann, v. Dyck und Ebert in München.

Allen diesen meinen Lehrern spreche ich an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aus; ganz besonders Herrn Professor Dr. Noether für die reiche wissenschaftliche Anregung, die er mir während meiner Studien zu Teil werden ließ und Herrn Professor Dr. Hilb für die Unterstützung bei der Ausführung der vorliegenden Arbeit.

